V.S.SHIPACHEV

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR MOSCÚ

FUNDAMENTOS
de las
MATEMÁTICAS SUPERIORES

В. С. Шипачёв

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Москва «Высшая школа»

V. S. SHIPACHEV

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por Alexandr I. Samojválov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002059-4 (исп.)
ISBN 5-06-000048-6 (русск.)

INDICE

PREFACIO

El presente manual contiene en forma generalizada la experiencia que el autor acumuló durante muchos años dando clases de matemática superior en la Universidad de Moscú, más precisamente, en sus facultades no matemáticas y en los Cursos nacionales de capacitación profesional de maestros de enseñanza media.

Al escribir el libro el autor se propuso como finalidad el exponer en forma clara, concreta y accesible para un amplio círculo de lectores los conceptos y teoremas fundamentales de la matemática superior; enseñar a los estudiantes a resolver de manera independiente problemas de matemática.

Puesto que en el libro hay una gran cantidad de ejemplos y problemas, resueltos minuciosamente, que aclaran el material teórico y contribuyen a asimilarlo más profundamente, él encontrará aplicación en la actividad pedagógica de los centros de enseñanza superior, escuelas técnicas, escuelas medias, cursos de capacitación profesional de maestros, así como en las secciones preparatorias de los centros de enseñanza superior.

Cada párrafo lleva formuladas «Preguntas para la autoverificación» concernientes, en lo fundamental, a la teoría. Éstas tienen por objeto ayudar a los alumnos en su estudio individual del material teórico.

Al final de cada capítulo (salvo el cap. 4) se dan problemas de control para repetir el material del capítulo respectivo y hacer más profundos los conocimientos adquiridos. Estos problemas serán muy útiles a los estudiantes de grados secundarios y a los maestros en la selección del material para los ejercicios, así como a los estudiantes de los centros de enseñanza superior para el trabajo individual.

Al final del libro se dan las respuestas, resoluciones e indicaciones para los problemas de control. Aquí el autor quisiera dar algunas recomendaciones. Antes de comenzar a resolver estos problemas es necesario primero estudiar la parte respectiva y alcanzar una claridad total en la comprensión de los conceptos y teoremas correspondientes. En este caso hace falta realizar por sí mismo, paralelamente con el texto, todos los cálculos y resolver todos los ejemplos, tanto analizados como los que se dan sin resolución. Esto será un buen entrenamiento y garantía de que el material sea bien asimilado.

Conviene prestar atención especial a los enunciados que contienen la terminología de «ε-N» y «ε-δ». Es importante entender clara y exactamente la esencia de las definiciones, el papel que juega y el lugar que ocupa cada palabra. Para ello es preciso examinar detalladamente los ejemplos y problemas propuestos.

Y por último. El material ha de estudiarse en estricta sucesión empezando por el primer capítulo, el primer párrafo y el primer subpárrafo, ya que en la matemática todos los conceptos están íntimamente vinculados entre sí. De un concepto se deduce otro y la omisión de uno de ellos puede hacer incomprensible el siguiente. En esto radica la particularidad específica de la matemática.

El autor espera que el presente manual facilite la labor de los estudiantes y profesores de los centros de enseñanza superior y media en el estudio de los fundamentos de matemática superior. Él también supone que esta obra será de utilidad a un amplio círculo de personas que estudian por correspondencia o como autodidactas. El libro les sustituirá, en cierto grado, al conferenciante y al profesor.

El autor

1

NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

§ 1. Conjuntos y designaciones fundamentales

En las matemáticas todos los conceptos se dividen en *primarios*[1]) y *definibles* a través de los conceptos primarios o ya conocidos. El concepto de *conjunto* es el concepto primario fundamental de las matemáticas, su base. Las palabras: *totalidad*, *familia*, *sistema*, *colección*, *unión*, etc. son sinónimos de la palabra *conjunto*. Como ejemplos de conjuntos sirven: el conjunto de alumnos en un aula dada; la totalidad de aquellos que sacan sólo notas «bien» y «sobresaliente» en matemática; la familia de las estrellas de la Osa Mayor; el conjunto de las páginas de este libro; el conjunto de todos los números racionales, etc. De los ejemplos citados se deduce que el conjunto puede contener un número finito o infinito de objetos de naturaleza arbitraria.

Los objetos de los cuales se compone un conjunto se llaman *elementos* o *puntos* del mismo. Los conjuntos suelen designarse con letras mayúsculas del alfabeto latino, y sus elementos, con letras minúsculas. Si x es un elemento del conjunto X, se escribe $x \in X$ (x pertenece a X). Si x no es un elemento del conjunto X, se escribe $x \notin X$ (x no pertenece a X). Si $x_1, \ldots, x_n$ son ciertos elementos, la notación $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ significa que el conjunto X se compone de los elementos $x_1, \ldots, x_n$. Un sentido análogo lo tiene también la notación $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Sean X e Y dos conjuntos. Si X e Y constan de unos mismos elementos, se dice que ellos *coinciden* y se escribe $X = Y$. Si en X faltan elementos no pertenecientes a Y, se dice que X *se contiene* en Y o bien que X es un *subconjunto del conjunto* Y. En este caso se escribe $X \subset Y$ o bien $Y \supset X$ (X se contiene en Y o Y contiene X).

○ [2]) **Ejemplos. 1.** El conjunto de los números pares X es un subconjunto del conjunto Y de los números enteros: $X \subset Y$. **2.** El conjunto de los números racionales Q es un subconjunto del conjunto **R** de todos los números reales [3]): $Q \subset \mathbf{R}$. **3.** El conjunto de los

---

[1]) Cabe especialmente subrayar que los conceptos primarios no pueden ser definidos y, por lo general, se explican con ejemplos. Con su ayuda se definen otros conceptos.

[2]) Aquí y a continuación los signos ○ y ● designan el comienzo de los ejemplos y su fin, respectivamente.

[3]) El conjunto de todos los números reales suele designarse con **R** (o con $\mathbf{R}^1$)

estudiantes de todas las facultades del instituto X y el conjunto de todos los estudiantes del mismo instituto Y coinciden: $X = Y$. ●

El conjunto que no contiene ni un solo elemento se llama *vacío* y se designa con el símbolo $\varnothing$. Un conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

El conjunto con un orden determinado de disposición de los elementos se denomina *ordenado*. A diferencia de un conjunto no ordenado el ordenado se escribe entre paréntesis ordinarios. Por ejemplo, de un mismo conjunto $\{x_1, x_2\}$ se pueden obtener dos conjuntos ordenados $(x_1; x_2)$ y $(x_2; x_1)$.

A continuación estudiaremos distintos conjuntos de los números reales. Para mayor brevedad, los números reales los llamaremos en todas partes, donde no haya lugar a equivocación, simplemente números.

Sea $P(x)$ cierta propiedad del número x. Entonces la notación $\{x \mid P(x)\}$ designa el conjunto de todos los números que poseen la propiedad $P(x)$.

○ **Ejemplos. 1.** El conjunto $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ es una colección de las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, o sea, este conjunto se compone de dos elementos: 1 y 2. **2.** El conjunto $\{x \mid 3 < x < 7\}$ es una colección de todos los números que satisfacen las desigualdades $3 < x < 7$. **3.** El conjunto $\{x \mid x > 7 \text{ y } x < 3\} = \varnothing$, o sea, es un conjunto vacío. ●

Si $x_1, \ldots, x_n$ son números arbitrarios, la notación $x = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$) significa que el número x es máximo (mínimo) entre los números $x_1, \ldots, x_n$.

En conclusión señalaremos que el *punto*, la *recta* y el *plano* son conceptos primarios. Para todos los demás conceptos se darán definiciones.

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué papel desempeñan en la matemática los conceptos primarios?
2. Nómbrese el concepto primario fundamental.
3. Cítese ejemplos de distintos conjuntos.
4. Cítese un ejemplo de conjuntos coincidentes.
5. ¿Cuántos subconjuntos pueden ser formados del conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$?
6. ¿Por qué el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto?
7. ¿Qué significa la notación $\{x \mid P(x)\}$?
8. Cítese los conceptos, salvo el de conjunto, que son primarios.

§ 2. Números reales y sus propiedades fundamentales

El concepto de número real figura entre los conceptos matemáticos fundamentales. Existen diferentes enfoques de definir el número real (método de secciones, definición del número real como fracción

decimal infinita y otros); no obstante, el método axiomático de introducir el número real es el más lógico y simple. Nótese que todos los métodos de introducción del número real son equivalentes, ya que en ninguno de ellos se establece el hecho de que exista tal número. Por eso en todos los casos es necesario introducir el axioma de existencia del número real. Puesto que la utilización de los axiomas es inevitable, es más sencillo enunciarlos de una vez y pasar a la exposición inmediata del material principal.

Recuérdese que el conjunto de los números reales se subdivide en dos conjuntos: conjunto de los números racionales y conjunto de los números irracionales. Se llama *racional* al número que puede representarse en la forma de $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros, con la particularidad de que $q \neq 0$. Se denomina *irracional* a todo número real que no es racional. Todo número racional $\frac{p}{q}$ o bien es entero, o bien puede ser representado como fracción decimal finita o infinita periódica. En cambio, el número irracional se representa por una fracción decimal infinita aperiódica. Por ejemplo, los números racionales 3/4 y 1/3 se representan, respectivamente, por las siguientes fracciones decimiales: 0,75 y 0,333 . . .; los números irracionales $\sqrt{2}$ y π se representan, respectivamente, por las fracciones decimales infinitas aperiódicas: 1,41421356 . . . y 3,14159 . . .

Citemos las propiedades fundamentales de los números reales, que tomaremos por axiomas, deduzcamos de ellas algunos corolarios y luego demos la definición de los números reales.

I. Adición y multiplicación de los números reales

Para todo par a y b de números reales están definidos, y además, de un modo único, dos números reales $a + b$ y $a \cdot b$ que se llaman *suma* y *producto* de aquéllos y poseen las propiedades siguientes.

Cualesquiera que sean los números a, b y c:

1°. $a + b = b + a$ **(propiedad conmutativa).**

2°. $a + (b + c) = (a + b) + c$ **(propiedad asociativa).**

3°. $a \cdot b = b \cdot a$ **(propiedad conmutativa).**

4°. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **(propiedad asociativa).**

5°. $(a + b) \cdot c = ac + bc$ **(propiedad distributiva).**

6°. *Existe el único número* 0 *tal que* $a + 0 = a$ *para todo número* a.

7°. *Para todo número* a *existe tal número* $-a$ *que* $a + (-a) = 0$.

8°. *Existe el único número* $1 \neq 0$ *tal que para todo número* a *tiene lugar la igualdad* $a \cdot 1 = a$.

9°. *Para todo número* $a \neq 0$ *existe tal número* a^{-1} *que* $a \cdot a^{-1} = 1$; *el número* a^{-1} *se designa también con el símbolo* $\frac{1}{a}$.

Observación. Los números $-a$ y a^{-1} de los cuales se trata en las propiedades 7ª y 9ª son únicos.

En efecto, si existiera, por ejemplo, un número más $b \neq -a$ que pudiera satisfacer la condición $a + b = 0$, entonces $a + b + + (-a) = -a$, de donde $a + (-a) + b = -a$, $0 + b = -a$ y $b = -a$, o sea, se ha obtenido una contradicción. (Demuestre por sí mismo la unicidad del número a^{-1}.)

II. Comparación de los números reales

Para cualesquiera dos números reales distintos a y b queda establecida una de las relaciones: $a = b$ (a es igual a b), $a > b$ o bien $b > a$ (a es mayor que b o b es mayor que a). La relación $=$ posee la propiedad siguiente: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

La relación $>$ posee las propiedades siguientes.

Cualesquiera que sean los números a, b y c:

10°. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

11°. *Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.*

12°. *Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$.*

En vez de $a > b$ se escribe también $b < a$ (b es menor que a). La notación $a \geqslant b$ (o, que es lo mismo, $b \leqslant a$) significa que $a = b$ o $a > b$ [1]). Las relaciones $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$ y $a \geqslant b$ se llaman *desigualdades* [2]). Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se denominan *desigualdades estrictas.*

El número a que satisface la desigualdad $a > 0$ se denomina *positivo* y el número a que satisface la desigualdad $a < 0$, *negativo.*

Nótese que un conjunto formado sólo por los números racionales satisface también las propiedades I y II.

III. Continuidad de los números reales

13°. *Sean X e Y dos conjuntos compuestos por los números reales. Entonces, si para todos los números $x \in X$ e $y \in Y$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$, existe al menos un número c tal que para cualesquiera números x e y se cumplen las desigualdades*

$$x \leqslant c \leqslant y.$$

Cabe señalar que el conjunto de todos los números reales posee propiedad de continuidad, pero no la posee el formado sólo por los números racionales. Efectivamente, supongamos que el conjunto X se compone de números racionales x para los cuales se cumple la desigualdad $x < \sqrt{2}$ y el conjunto Y consta de números racionales y

[1]) Por ejemplo, se puede escribir $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Desde luego, se puede escribir más exactamente: $2 = 2$, $2 < 5$; sin embargo, las desigualdades $2 \leqslant 2$ y $2 \leqslant 5$ son también ciertas, ya que significan que «dos no es mayor que dos» y «dos no es mayor que cinco».

2) Las desigualdades en las que aparece al menos una variable se denominan inecuaciones. (*Nota del tr.*).

para los cuales se cumple la desigualdad $y > \sqrt{2}$. Entonces, evidentemente, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$; sin embargo, no existe un número racional c tal que se cumplan las desigualdades $x \leqslant c \leqslant y$. En efecto, tal número podría ser sólo $\sqrt{2}$ que, como se sabe, no es racional.

De las propiedades I a III se desprenden todas las demás propiedades de los números reales. Citemos algunas de ellas, pero a continuación utilizaremos también otras propiedades sin demostrarlas formalmente (tal demostración es fácil de realizar cada vez).

Cualesquiera que sean los números a, b, c y d:

14°. *El número $x = b + (-a)$ es una solución de la ecuación $a + x = b$.*

□ Efectivamente, en virtud de las propiedades 1ª, 2ª, 6ª, 7ª tenemos $a + b + (-a) = b$. ■ [1])

El número $b + (-a)$ se llama *diferencia* de los números b y a y se designa con el símbolo $b - a$. Nótese que si $a < b$ (o, que es lo mismo, $b > a$), la diferencia $b - a > 0$. En efecto, en virtud de la propiedad 11ª de la desigualdad $b > a$ obtenemos $b + (-a) > a + (-a)$ o bien $b - a > 0$.

15°. *El número $x = ba^{-1}$ es una solución de la ecuación $ax = b$* si $a \neq 0$.

□ Efectivamente, en virtud de las propiedades 3ª, 4ª, 8ª y 9ª tenemos $a \cdot ba^{-1} = b$. ■

El número ba^{-1} se llama *cociente* de los números b y a y se designa con el símbolo $\frac{b}{a}$ o bien $b : a$.

16°. *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

□ En efecto, puesto que $a < b$, entonces $b - a > 0$. Por consiguiente, conforme a la propiedad 11ª, $b - a + (-b) > 0 + (-b)$, de donde obtenemos $-a > -b$. ■

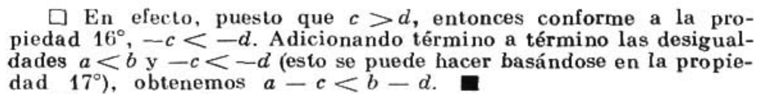
En particular, si $a > 0$, entonces $-a < 0$, y si $a < 0$, entonces $-a > 0$ (aquí hemos utilizado el hecho de que $-0 = 0$; efectivamente, en virtud de la 6ª propiedad $(-0) + 0 = -0$ y conforme a la 7ª propiedad $(-0) + 0 = 0$ de donde resulta que $-0 = 0$).

17°. *Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$, o sea, las desigualdades que tienen un mismo signo pueden sumarse término a término.*

□ En efecto, si $a > b$ y $c > d$, entonces, conforme a la propiedad 11ª, tenemos $a + c > b + c$ y $c + b > d + b$. Por eso en virtud de la 10ª propiedad $a + c > b + d$. ■

18°. *Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$, o sea, se pueden sustraer las desigualdades de signos opuestos, conservando el signo de la desigualdad de la cual se ha restado la otra.*

[1]) Aquí y a continuación el signo □ significa el comienzo de la demostración y ■, su fin.


□ En efecto, puesto que $c > d$, entonces conforme a la propiedad 16°, $-c < -d$. Adicionando término a término las desigualdades $a < b$ y $-c < -d$ (esto se puede hacer basándose en la propiedad 17°), obtenemos $a - c < b - d$. ■

19°. $a - a = 0$.

□ En efecto, $a - a = a + (-a) = 0$. ■

20°. $a \cdot 0 = 0$.

□ Efectivamente, $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = ab - ab = 0$. ■

21°. $-(-a) = a$.

□ En efecto, $-(-a) = (-(-a)) + (-a) + a = 0 + a = a$. ■

22°. $(-a)\, b = -ab$.

□ Efectivamente, $(-a)\, b = (-a)\, b + ab + (-ab) = [(-a) + a] \cdot b - ab = 0 \cdot b - ab = 0 - ab = -ab$. ■

Notemos que reemplazando la suma $(-a)b + ab$ por el producto $[(-a) + a]\, b$, hemos utilizado la 5ª propiedad. De la propiedad 22ª obtenemos, en particular, $(-1)\, a = -a$.

23°. *Si* $a < 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab < 0$.

□ En efecto, puesto que $a < 0$, entonces $-a > 0$, por eso conforme a la 12ª propiedad $(-a)\, b > 0$. Por consiguiente, $(-a)\, b = -ab > 0$ y, por lo tanto, $ab < 0$. ■

24°. *Si* $a < 0$ y $b < 0$, *entonces* $ab > 0$.

□ Efectivamente, puesto que $b < 0$, entonces $-b > 0$. Por eso en virtud de la 23ª propiedad $(-b)\, a < 0$. Por consiguiente, $(-b)\, a = -ab < 0$ y, por lo tanto, $ab > 0$. ■

25°. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a \cdot a = a^2 > 0$.

La validez de esta afirmación se deduce de las igualdades 12ª y 24ª. En particular, $1 = 1^2 > 0$, o sea, $1 > 0$.

26°. *Si* $a > 0$, *entonces también* $a^{-1} > 0$.

□ En efecto, según las propiedades 9ª, y 25ª, $aa^{-1} = 1 > 0$ y *si suponemos que* $a^{-1} \leqslant 0$, *en virtud de las propiedades* 20ª *y* 23ª obtendremos que $aa^{-1} \leqslant 0$, o sea, tiene lugar una contradicción. Por consiguiente, $a^{-1} > 0$. ■

Así pues, vemos que de las propiedades fundamentales I...III ***de los números reales se desprenden las demás propiedades de los*** **mismos. Por eso se puede considerar que los números reales no son más que el conjunto de los elementos que poseen las propiedades I...III. Tal definición de los valores reales se llama** ***axiomática*** **y las propiedades I...III,** ***axiomas de los números reales.***

En conclusión nótese que, partiendo de las propiedades I...III, todo número real se puede presentar en forma de una fracción decimal infinita

$$a,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

donde a es todo número entero y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ son los números que toman los valores enteros de 0 a 9 ($0 \leqslant a_n \leqslant 9$). Sin

embargo, no vamos a considerar esta cuestión [1]). Nótese, además, que se puede definir los números reales como fracciones decimales infinitas y luego demostrar sus propiedades fundamentales I...III [2]). Todas las otras construcciones de números reales conducen a los conjuntos de los elementos que poseen las propiedades I...III.

En adelante, al considerar los problemas teóricos con la participación de los números reales, no nos interesará la naturaleza de estos números sino sólo nos interesarán las propiedades que ellos poseen.

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué números forman el conjunto de los números reales?
2. ¿En qué consiste el método axiomático de introducción de los números reales?
3. Nómbrense las propiedades fundamentales (axiomas) de los números reales.
4. ¿Cuál es la propiedad fundamental que distingue el conjunto de todos los números reales del formado sólo por números racionales?

§ 3. Conjuntos numéricos más usados

Sean a y b dos números y $a < b$. Utilizaremos las designaciones siguientes:

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a,\ b]; \qquad \{x \mid a < x \leqslant b\} = (a,\ b];$$
$$\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a,\ b);$$
$$\{x \mid a < x < b\} = (a,\ b) \qquad \{x \mid a \leqslant x\} = [a,\ +\infty);$$
$$\{x \mid a < x\} = (a,\ +\infty);$$
$$\{x \mid x \leqslant b\} = (-\infty,\ b] \qquad \{x \mid x < b\} = (-\infty,\ b).$$

Designaremos el conjunto de todos los números reales del modo siguiente: $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ o bien $(-\infty >,\ +\infty)$.

Todos estos conjuntos se llaman *intervalos* con la particularidad de que $[a,\ b]$ se dice *segmento* y $[a,\ b)$, $(a,\ b]$, $[a,\ +\infty)$ y $(-\infty,\ b]$, *semiintervalos*; $(a,\ b)$, $(a,\ +\infty)$, $(-\infty,\ b)$ y $(-\infty,\ +\infty)$, *intervalos*. *Los intervalos* $[a,\ b]$, $(a,\ b]$ $[a,\ b)$ y $(a,\ b)$ se llaman *finitos*; a y b son sus *extremos*. Los demás intervalos se llaman *infinitos*.

El intervalo $(a,\ b)$ se distingue del segmento $[a,\ b]$ únicamente por el hecho de que no le pertenecen los extremos a y b. Esta distinción desempeña un papel esencial en muchas cuestiones del análisis matemático. Además, el intervalo $(a,\ b)$ no contiene los números mayor y menor, mientras que en el segmento $[a,\ b]$ tales números son b y a, respectivamente.

---

[1]) Esta cuestión se considera, por ejemplo, en el libro: *L. D. Kudriávtsev.* Curso de análisis matemático. M., 1989, t. 1, *en ruso*.

[2]) Tal construcción de los números reales se da en el libro: *V. A. Illin, E. G. Pozniak*. Fundamentos del análisis matemático. M., 1981, parte I, *en ruso*.

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué conjuntos numéricos se llaman intervalos?
2. Del segmento $[a, b]$ está eliminado el intervalo (a, b). ¿Qué ha quedado?
3. Del segmento $[1, 8]$ está eliminado el intervalo $(3, 5)$. ¿Qué es lo que queda? Escriba el conjunto de los números que quedaron con ayuda de los intervalos.

§ 4. Cotas de los conjuntos numéricos

Sea X un conjunto de números no vacío.

Definición. *El conjunto X se llama acotado superiormente (inferiormente) si existe un número c tal que para cada $x \in X$ se cumpla la desigualdad* $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$ [1].

En este caso el número c se denomina cota *superior (inferior) del conjunto X.*

El conjunto limitado superior e inferiormente se dice *acotado.*

○ **Ejemplos. 1.** Todo dintervalo finito ($[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)) está acotado. **2.** El intervalo $(a, +\infty)$ es un conjunto acotado inferiormente, pero no acotado superiormente. **3.** El intervalo $(-\infty, +\infty)$ es un conjunto no acotado ni superiormente ni inferiormente. ●

Es evidente que todo conjunto X acotado superiormente (inferiormente) tiene una multitud infinita de cotas superiores (inferiores) que forman el conjunto de los números que acotan a X por arriba (por abajo). En efecto, si el número c es la cota superior (inferior) del conjunto X, entonces todo número c', mayor (menor) que el número c, también es la cota superior (inferior) del conjunto X, ya que de la validez de la desigualdad $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$ resulta que $x \leqslant \leqslant c'$ $(x \geqslant c')$.

Surge la cuestión sobre la existencia del número mínimo entre los números del conjunto acotado superiormente y del número máximo entre los que forman el conjunto acotado inferiormente.

El número menor entre los que acotan por arriba el conjunto X se llama *cota superior exacta* del conjunto X y se designa por el símbolo $\sup X$ [2]) y el número mayor entre los que acotan por abajo el conjunto X se denomina *cota inferior exacta* de este conjunto y se designa por el símbolo $\inf X$ [3]).

○ **Ejemplos. 1.** Sea $X = (a, b)$. Entonces el número b y, por consiguiente, también todo número mayor es la cota superior del conjunto dado y el número a y todo número menor, su cota inferior. Es evidente que el número b es la cota superior exacta del conjun-

---

[1]) Para abreviar la notación en esta definición están unidas dos definiciones una de las cuales corresponde a las palabras puestas entre paréntesis. A continuación también utilizaremos este procedimiento.

[2]) *supremum* (lat.,) o sea, superior.

[3]) *infinum* (lat.), o sea, inferior.

to X y el número a, su cota inferior exacta, o sea, $b = \sup X$, $a = \inf X$. **2.** Sea $X = (a, +\infty)$. Entonces el número a y todo número menor es la cota inferior del conjunto X. Es obvio que el número $a = \inf X$, al mismo tiempo el conjunto dado no tiene cotas superiores y, por consiguiente, no tiene cota superior exacta. ●

Propiedad de la cota superior (inferior) exacta. La cota superior exacta ($\sup X$) posee la siguiente propiedad importante: *por pequeño que sea el número* $\varepsilon > 0$ [1]*, habrá un número* $x \in X$ *tal que* $x > \sup X - \varepsilon$.

Si no hubiera existido tal número x, el número $\sup X - \varepsilon$ habría sido también la cota superior y entonces el número $\sup X$ no habría sido la cota superior exacta. Con otras palabras, esta propiedad expresa el hecho de que el número $\sup X$ es el mínimo entre los que acotan por arriba el conjunto X y no puede ser disminuido.

La cota inferior exacta también posee la propiedad análoga: *por pequeño que sea el número* $\varepsilon > 0$, *habrá un número* $x \in X$ *tal que* $x < \inf X + \varepsilon$.

○ **Ejemplo.** Demostrar que el conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ está acotado. Determinar qué números son sus cotas. Hallar las cotas superior e inferior exactas de este conjunto.

Resolución. Para todo n natural se cumplen las desigualdades $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, por eso el conjunto dado X está acotado. Ahora bien, el número 1 es la cota superior y el número 0, su cota inferior.

Vamos a demostrar que el número 1 es la cota superior exacta del conjunto X, o sea, que $\sup X = 1$. Para esto, de acuerdo con la propiedad de la cota superior exacta hace falta mostrar, que para todo $\varepsilon > 0$ habrá un número natural n tal que se cumpla la desigualdad $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. Este número n es $n = 1$, ya que $1 > 1 - \varepsilon$ es una desigualdad justa para todo $\varepsilon > 0$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Demostremos ahora que el número 0 es la cota inferior exacta del conjunto X. Para esto es necesario comprobar que para todo $\varepsilon > 0$, habrá un número natural n tal que se cumpla la desigualdad $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$ o bien $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Resolviendo la desigualdad, obtenemos $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tomando cualquier número natural $n > \frac{1}{\varepsilon}$, odtenemos la desigualdad requerida y esto, conforme a la propiedad de la cota inferior exacta, significa precisamente que el número 0 es la cota inferior exacta del conjunto X, o sea, $\inf X = 0$.

[1]) ε es la letra griega «épsilon».

Notemos que al conjunto dado X le pertenece la cota **exacta** 1 y es su número mayor, mientras que la cota inferior exacta 0 no le pertenece y en este conjunto falta el número menor. ●

La cota superior exacta sup X puede ser definida también de otro modo:

El número sup X *se llama cota superior exacta del conjunto* X *limitado por arriba si*: 1) *para todo número* $x \in X$ *se cumple la desigualdad* $x \leqslant \sup X$; 2) *para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $x \in X$ *tal que* $x > \sup X - \varepsilon$.

En esta definición la primera condición muestra exactamente que el número sup X acota al conjunto X superiormente y la segunda condición muestra que ningún número, menor que sup X, limita superiormente al conjunto X, o sea, que ya no es su cota superior.

Análogamente se define la cota inferior exacta inf X. (Hága esto por sí mismo).

Surge la pregunta ¿para qué condiciones el conjunto de números tiene una cota superior (inferior) exacta? El siguiente teorema importante da la respuesta.

Teorema 1.1. *Todo conjunto numérico acotado superiormente (inferiormente) tiene una cota superior (inferior) exacta.*

□ **Demostración.** Sea X un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces el conjunto Y de los números que acotan X superiormente no es vacío. De la definición de la cota superior se deduce que para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ tiene lugar la desigualdad $x \leqslant y$. Según la 13ª propiedad de continuidad de los números reales (véase el § 2) existe un número c tal que para todo número x e y se cumplen las desigualdades

$$x \leqslant c \leqslant y. \quad (1)$$

En virtud de la definición de la cota superior, de la primera de las desigualdades (1) se desprende que el número c acota superiormente al conjunto X, o sea, es la cota superior, y de la segunda desigualdad se desprende que este número es el menor entre tales números [1]), o sea, es la cota superior exacta, con la particularidad de que puede pertenecer o no pertenecer al conjunto X.

El caso de existencia de la cota inferior exacta en un conjunto no vacío acotado inferiormente se considera de un modo análogo. ■

Si el conjunto X no está acotado superiormente (inferiormente) convengamos en escribir $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Dése la definición del conjunto X acotado superiormente (inferiormente); cite ejemplos.

2. Dése la definición de la cota superior (inferior) exacta del conjunto X acotado superiormente (inferiormente); cite ejemplos.

---

[1]) Puesto que $c \leqslant y$ para todos los números $y \in Y$.

3. Enúnciese la propiedad de la cota superior (inferior) exacta.
4. Demuéstrese que el conjunto X acotado inferiormente tiene la cota inferior exacta.
5. ¿Qué significa la notación simbólica: a) $\sup X = +\infty$; b) $\inf X = -\infty$?

§ 5. Valor absoluto de un número

El concepto de valor absoluto de un número y las desigualdades relacionadas con los valores absolutos se utilizan ampliamente en la matemática.

Definición. *Se llama valor absoluto (o módulo) del número x al mismo número x*, si $x \geqslant 0$ *o bien al número $-x$, si $x < 0$.*

El valor absoluto del número x se designa con el símbolo $|x|$. Ahora, bien,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|+5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$.

De la definición se deducen varias propiedades del valor absoluto de un número.

1°. $|x| \geqslant 0$.

□ Efectivamente: 1) *si* $x \geqslant 0$, *entonces* $|x| = x \geqslant 0$; 2) *si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x$; pero $-x > 0$, puesto que $x < 0$, *o sea*, $|x| > 0$.

De 1) *y* 2) obtenemos que $|x| \geqslant 0$. ■

2°. $|x| = |-x|$.

□ En efecto: 1) si $x \geqslant 0$, entonces $-x \leqslant 0$ y en este caso $|-x| = -(-x) = x = |x|$, ya que $x \geqslant 0$; 2) si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y en este caso $|-x| = -x = |x|$, ya que $x < 0$.

De 1) y 2) obtenemos que $|x| = |-x|$. ■

3°. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

□ Efectivamente: 1) si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x$ y $-x \leqslant 0$ y en este caso $-x \leqslant 0 \leqslant x = |x|$, de donde $-x \leqslant |x|$ o bien $-|x| \leqslant x$; 2) si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $-x > 0$ y en este caso $x < 0 < -x = |x|$, de donde $x < |x|$.

De 1) y 2) obtenemos que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. ■

Demostremos en forma de teoremas las tres propiedades siguientes.

Teorema 1.2. *Sea ε un número positivo. Entonces las desigualdades* $|x| \leqslant \varepsilon$ y $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$ *son equivalentes.*

□ **Demostración.** Sea $|x| \leqslant \varepsilon$. En este caso:

1) si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x \leqslant \varepsilon$, de donde $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$;

2) si $x < 0$, entonces $|x| = -x \leqslant \varepsilon$, de donde $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$.

Uniendo 1) y 2), para todo número x obtenemos $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Supongamos que son válidas las desigualdades $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Esto quiere decir que simultáneamente se cumplen las desigualdades

$x \leqslant \varepsilon$ y $x \geqslant -\varepsilon$. De la última desigualdad tenemos $-x \leqslant \varepsilon$. Puesto que, por definición, $|x|$ es x o $-x$, entonces $|x| \leqslant \varepsilon$. ■

Teorema 1.3. *El valor absoluto de la suma de dos números no es mayor que la suma de los valores absolutos de estos números, o sea,* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

□ **Demostración.** Sean x e y cualesquiera números. Conforme a la propiedad 3ª para ellos son válidas las desigualdades

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{y} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

sumando las cuales término a término obtenemos

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant (|x| + |y|).$$

Según el teorema 1.2 esta desigualdad doble es equivalente a la desigualdad $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. ■

Notemos que $|x-y| \leqslant |x| + |y|$. Efectivamente, $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$ (compruebe esto por sí mismo).

Teorema 1.4. *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos de estos dos números, o sea* $|x-y| \geqslant |x| - |y|$.

□ **Demostración.** Para todos números x e y tenemos

$$x = y + (x-y).$$

Según el teorema 1.3 es válida la desigualdad

$$|x| = |y + (x-y)| \leqslant |y| + |x-y|,$$

de donde obtenemos $|x-y| \geqslant |x| - |y|$. ■

Notemos que $|x+y| \geqslant |x| - |y|$. Efectivamente, $|x+y| = |x-(-y)| \geqslant |x| - |-y| = |x| - |y|$ (compruebe esto por sí mismo).

Y en conclusión nótese, además, que cualesquiera que sean dos números x e y tienen lugar las relaciones

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{y} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{si } y \neq 0$$

que son fáciles de comprobar considerando los casos cuando x e y son números de un mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) y cuando ellos tienen los signos opuestos. Por ejemplo, verifiquemos $|xy| = |x|\,|y|$ en el caso cuando $x > 0$, $y < 0$. Tenemos $|x| = x$, $|y| = -y$ y $xy < 0$; por consiguiente, $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x|\,|y|$.

○ **Ejemplo 1.** Hallar las soluciones de las ecuaciones siguientes: 1) $|x| = x+2$; 2) $|x| = x-2$; 3) $x + 2|x| = 3$; 4) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$.

Resolución. 1) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x = x + 2$, de donde $0 = 2$ es una igualdad incorrecta. Por lo tanto, no hay soluciones. Para $x < 0$ obtenemos $-x = x + 2$, de donde $x = -1$. Esto es la solución de la ecuación.

2) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x = x - 2$, de donde $0 = -2$ es una igualdad incorrecta. Por lo tanto no hay soluciones. Para $x < 0$ obtenemos $-x = x - 2$, de donde $x = 1 > 0$ lo que contradice la suposición hecha $x < 0$. Así pues, la ecuación no tiene soluciones.

3) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x + 2x = 3$, de donde $x_1 = 1$. Para $x < 0$ obtenemos $x - 2x = 3$, de donde $x_2 = -3$. Por consiguiente, $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$ son las soluciones de la ecuación.

4) Utilicemos el hecho de que $|x|^2 = x^2$ [1]. Entonces $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$. Reemplazando $|x|$ por y, obtenemos $y^2 + 3y - 4 = 0$, de donde $y_1 = 1$, $y_2 = -4$. Puesto que $y = |x| \geqslant 0$, tenemos que $y_2 = -4$ no conviene. Queda $y_1 = |x| = 1$ y esto es equivalente a $x = -1$ y $x = 1$. La ecuación puede ser resuelta también por el método corriente, considerando los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$. (Haga esto por sí mismo).

Ejemplo 2. Demostrar que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Resolución. Puesto que, por definición, $||x| - |y||$ es $|x| - |y|$ o bien $-(|x| - |y|) = |y| - |x|$, para la demostración de dicha desigualdad hace falta establecer que: 1) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$ y 2) $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Pero la desigualdad 1) queda demostrada en el teorema 1.4 y la desigualdad 2) también se desprende de este teorema y de la propiedad 2ª:

$$|x - y| = |-(x - y)| = |y - x| \geqslant |y| - |x|. \quad ●$$

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué se llama valor absoluto de un número?
2. Demuéstrese la equivalencia de las desigualdades $|x| < \varepsilon$ y $-\varepsilon < x < \varepsilon$.
3. ¿Qué es mayor: $|2 - 3|$ ó $|2| + |-3|$?
4. Hállese $|-x|$ si $x < 0$.
5. ¿Es cierto que $|x^3| \neq |x|^3$ si $x < 0$?
6. Demuéstrese que $|x^2| = |x|^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$.
7. Escríbase sin el signo de módulo la expresión $|x - y|$ si $x < y$.

§ 6. Método de inducción matemática

El método de inducción matemática pertenece a los más importantes métodos de demostraciones matemáticas. Se emplea para demostrar las afirmaciones que dependen del número natural n.

[1] Efectivamente, poniendo $x = y$ en la relación $|xy| = |x||y|$, obtenemos $|x|^2 = |x^2| = x^2$, ya que $x^2 \geqslant 0$.

Enunciémoslo en la forma general: para demostrar cierta afirmación dependiente del número natural n (por ejemplo, cualquier fórmula) es necesario: 1) comprobar su validez para $n = 1$ [1]); 2) suponiendo la validez de la afirmación para cierto n ($n > 1$), demostrar su validez para $n + 1$. Luego se saca la conclusión de que la afirmación dada es válida para todo número natural n.

○ **Ejemplo 1.** Haciendo uso del método de inducción matemática demostrar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Resolución. 1) *Comprobamos la validez de la fórmula dada para* $n = 1$. El primer miembro es igual a la unidad. El segundo miembro $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$. Por lo tanto, la fórmula es justa para $n = 1$.

2) Suponiendo que la fórmula dada es justa también para cierto número n ($n > 1$), demostremos que para $n + 1$ tiene lugar la misma fórmula:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1^2) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Efectivamente,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6},$$

que es lo que se quería demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula dada es cierta para todo número natural n. ●

El método de inducción matemática es cómodo para determinar las sumas de un número finito de sumandos.

○ **Ejemplo 2.** Hallar la suma

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Resolución. Designemos esta suma con S_n, o sea,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Para obtener para S_n una expresión que no necesite la adición algebraica de n sumandos, calculemos algunos primeros valores de esta

[1]) Si para $n = 1$ la afirmación no tiene sentido, la validez de la misma ha de comprobarse para el valor mínimo de n con el cual la afirmación tiene sentido.

suma:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 3 = 4; \quad S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$$
$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Vemos que estos valores son los cuadrados sucesivos de números naturales. Es natural suponer que $S_n = n^2$. Para demostrar la validez de esta igualdad utilicemos el método de inducción matemática. Tenemos: 1) $S_1 = 1 = 1^2$. Por lo tanto, la fórmula es justa para $n = 1$; 2) suponiendo que ella es justa para cierto n, demostremos que para $n + 1$ tiene lugar la fórmula $S_{n+1} = (n + 1)^2$. En efecto,

$$S_{n+1} = S_n + [2(n+1) - 1] = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

que es lo que se necesitaba demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática sacamos la conclusión de que la fórmula $S_n = n^2$ es justa para todo número natural n y

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \quad \bullet$$

Ejercicio. Hallar la suma $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. (*Resp.* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. **Indicación:** reemplace cada sumando por la diferencia según la fórmula $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ o haga uso de la inducción.)

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el método de inducción matemática?
2. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que para cada n natural es válida la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 7. Factorial y fórmula del binomio de Newton

1. Factorial. Para calcular la suma de los primeros n números naturales hay una fórmula cómoda

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para el producto de los primeros n números naturales tal fórmula no existe, pero esta magnitud, que se encuentra con frecuencia en el análisis combinatorio y otras partes de la matemática, tiene una

designación especial: $n!$ (factorial de n). Así pues, por definición,

$$1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ \cdot n = n!$$

El signo de admiración está elegido, quizás, para la designación debido al hecho de que incluso para valores comparativamente pequeños de n, el número $n!$ es muy grande; para mostrar lo rápido que crece $n!$ con el aumento de n escribamos estos números para n de 1 a 10: $1! = 1$ [1]), $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 3!\cdot 4 = 24$, $5! = 4!\cdot 5 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40\,320$, $9! = 362\,880$, $10! = 3\,628\,800$.

De la definición de $n!$ se deduce que las factoriales de dos números naturales vecinos n y $n+1$ están relacionadas por la fórmula

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1). \tag{1}$$

Notemos que si en esta igualdad se sustituye $n = 0$, obtenemos $1! = 0!\cdot 1$, por eso se supone

$$0! = 1; \tag{2}$$

este acuerdo resulta frecuentemente cómodo en distintas fórmulas generales.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese la fórmula $(n+1)! - n! = n!\cdot n$.

Resolución. Hagamos uso del método de inducción matemática. Tenemos: 1) para $n = 1$ $(1+1)! - 1! = 1!\cdot 1$, de donde $1 = 1$, por lo tanto, la fórmula es justa; 2) suponiendo su validez para cierto n demostremos que para $n+1$ tiene lugar la fórmula $(n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n+1)$. Efectivamente, por la fórmula (1) obtenemos

$$(n+2)! - (n+1)! = n!\,(n+1)(n+2) - n!\,(n+1) =$$
$$= n!\,(n+1)\,[(n+2) - 1] = n!\,(n+1)\,(n+1) = (n+1)!(n+1)$$

que es lo que se quería demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula es justa para todo n natural.

Ejemplo 2. Hallar la suma $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$

Resolución. Reemplacemos cada sumando por la diferencia según la fórmula $(n+1)! - n! = n!\cdot n$ (véase el ejemplo 1); obtenemos

$$(1+1)! - 1! + (2+1)! - 2! + (3+1)! - 3! + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)! - n! = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1,$$

ya que todos los sumandos en el primer miembro de la igualdad, a excepción del segundo y el penúltimo, se suprimen recíprocamente.

[1]) Por definición se supone $1! = 1$.

Por consiguiente, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$. ●

Ejercicio. Hállese la suma $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$. $\left(Resp.\ 1 - \frac{1}{n!}\right.$. *Indicación*: reemplácese cada sumando por la diferencia según la fórmula $\left.\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)$.

2. Fórmula del binomio de Newton. En las matemáticas se utilizan ampliamente los magníficos números llamados coeficientes binomiales. Estos tienen la designación especial C_n^k y se hallan por la fórmula

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{3}$$

donde n son números enteros no negativos y k, números enteros no negativos que satisfacen la condición $0 \leqslant k \leqslant n$.

Si el numerador y denominador de la fracción (3) se reducen eliminando $(n-k)!$, obtenemos la fórmula

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

que es cómoda de guardar en la memoria y con cuya ayuda es más fácil realoizar los cálculos. El denominador de esta fracción está formado por el producto de todos los primeros k números naturales y el numerador, por el producto de k números naturales escritos en el orden de decrecimiento, comenzando con el número n. En el análisis combinatorio esta fórmula define el coeficiente binomial C_n^k como *número de combinaciones de n elementos tomados k a k*.

○ **Ejemplo 3.** Calcular C_{20}^6.
Resolución. Tenemos

$$C_{20}^6 = \frac{20!}{6!\,14!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 38\,760. \quad ●$$

Con ayuda de los coeficientes binomiales se demuestran muchas afirmaciones matemáticas y, en particular, una *fórmula* muy importante *del binomio de Newton* [1])

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n \tag{4}$$

a cuyo nombre se debe también la denominación de los coeficientes C_n^k.

□ Vamos a demostrar la fórmula (4) por el método de inducción matemática, pero mostremos previamente que para los coeficientes

[1]) Isaac Newton (1642 — 1727), ilustre matemático, mecánico y astrónomo nglés.

binomiales se cumple la relación

$$C_n^{k+1}+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}. \tag{5}$$

En efecto,

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=$$
$$=\frac{n!}{k!\,(k+1)\,(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)}=$$
$$=\frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k}\right)=$$
$$=\frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k-1)!\,(k+1)\,(n-k)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}=C_{n+1}^{k+1}$$

que es lo que se quería mostrar.

Demostremos ahora la fórmula (4). 1) Comprobamos la validez de la fórmula (4) para $n=1$:

$$(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b=a+b,$$

ya que en virtud del acuerdo (2) $C_1^0=\frac{1!}{0!\,1!}=1,\ C_1^1=\frac{1!}{1!\,0!}=1.$

2) Suponiendo que la fórmula (4) es justa para cierto n, demostremos que para $n+1$ tiene lugar la misma fórmula, o sea,

$$(a+b)^{n+1}=C_{n+1}^0a^{n+1}+C_{n+1}^1a^nb+\ldots$$
$$\ldots+C_{n+1}^{k+1}a^{n-k}b^{k+1}+\ldots+C_{n+1}^nab^n+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}. \tag{6}$$

Efectivamente,

$$(a+b)^{n+1}=(C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots$$
$$\ldots+C_n^nb^n)\cdot(a+b)=C_n^0a^{n+1}+C_n^1a^nb+\ldots$$
$$\ldots+C_n^{k+1}a^{n-k}b^{k+1}+\ldots+C_n^nab^n+C_n^0a^nb+\ldots$$
$$\ldots+C_n^ka^{n-k}b^{k+1}+\ldots+C_n^{n-1}ab^n+C_n^nb^{n+1}=$$
$$=C_n^0a^{n+1}+(C_n^0+C_n^1)\,a^nb+\ldots+(C_n^k+C_n^{k+1})a^{n-k}b^{k+1}+\ldots$$
$$\ldots+(C_n^{n-1}+C_n^n)\,ab^n+C_n^nb^{n+1},$$

de donde en virtud de que $C_n^0=1=C_{n+1}^0$, $C_n^0+C_n^1=C_{n+1}^1$, C_n^k+ $+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^{n-1}+C_n^n=C_{n+1}^n$, $C_n^n=1=C_{n+1}^{n+1}$ (véanse las fórmulas (2), (3), (5)) se deduce la fórmula (6). De (1) y (2) basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula (4) es justa para todo número natural n. ■

La fórmula (4) suele escribirse brevemente así:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

[El símbolo $\sum$ (la letra griega «sigma») designa el signo de sumación (de adición).]

De la fórmula (4), en particular, para $n = 2$ y $n = 3$ obtenemos las fórmulas bien conocidas:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Ejercicio. Escriba el desarrollo según la fórmula del binomio de Newton $(a+b)^6$. (*Resp.* $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.)

PREQUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué significa la notación $n!$?
2. Hállese el número $n!$ para $n = 11$; 12.
3. ¿Puede $n!$ terminar en cinco ceros exactamente?
4. Demuéstrese la fórmula del binomio de Newton.

§ 8. Números complejos

1. Nociones breves. La introducción de los números complejos se debe al hecho de que en el conjunto de los números reales no se puede extraer la raíz de grado par de un número negativo.

Definición. *Se llama número complejo a la expresión que tiene la forma*

$$z = x + iy = x + yi,$$

donde x e y son números reales; i, el símbolo especial. En este caso x se llama parte real del número z; y, parte imaginaria de este número; i, unidad imaginaria definida por la igualdad $i^2 = -1$. [1])

Los números complejos $x_1 + iy_1$ y $x_2 + iy_2$ se consideran iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Por definición se supone también que $x + i0 = x$, $0 + iy = iy$, $0 + 0i = 0$.

De la definición se deduce que:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \; \ldots .$$

[1]) O sea, la unidad imaginaria es un número cuyo cuadrado es igual a la unidad negativa.

A cada número complejo $z = x + iy$ corresponde el número $x - iy$ que se denomina conjugado con z y se designa $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$.

○ **Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Resolución. Aplicando a la ecuación dada la regla conocida de determinación de las raíces de una ecuación cuadrática, obtenemos

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i. \quad ^{1)}$$

La ecuación dada no tiene raíces reales; sus raíces son complejas conjugadas, o sea, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$.

Ejercicio. Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$.
(*Resp.* $x_{1,2} = 1 \pm i$).

2. Operaciones con los números complejos. Con los números complejos pueden realizarse operaciones aritméticas con ayuda de las reglas que están adoptadas en el álgebra para las expresiones literales. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos. Entonces con los números complejos z_1 y z_2 son válidas las transformaciones siguientes:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + iy_2 \neq 0.$$

De esta manera vemos que la suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos es, a su vez, un número complejo.

○ **Ejemplo 2.** Hallar la suma de los números $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - i2$.

Resolución. Tenemos

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - i2) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i.$$

Ejemplo 3. Dividir el número $z_1 = 2 + i3$ por el número $z_2 = 1 + i4$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + i3)(1 - i4)}{(1 + i4)(1 - i4)} = \frac{14 - i5}{17} = \frac{14}{17} - i\,\frac{5}{17}.$$

---

1) Se puede demostrar que $\sqrt{-1} = \pm i$.

Ejercicios. 1) Hallar el producto de los números $z_1 = 2 - i3$ y $z_2 = 1 + i2$ (*Resp.* $8 + i$).
2) Dividir el número $z_1 = 1 + i$ por el número $z_2 = 1 - i$ (*Resp.* i).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué número se llama complejo? Nombre las partes real e imaginaria del número complejo.
2. Dése la definición de la unidad imaginaria. ¿Cómo se designa la unidad imaginaria?
3. ¿Qué números complejos se denominan conjugados?
4. Enúnciese la condición de igualdad de los números complejos.
5. ¿Cómo se cumplen las operaciones de adición, de sustracción, de multiplicación y de división de los números complejos?

§ 9. Problemas de control

1.1. Demuéstrese que el conjunto $X = (0, 1)$ está acotado. ¿Qué números son cotas? Halle la cota superior exacta de este conjunto.
1.2. Demuéstrese que el conjunto $X = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de todos los números enteros no está acotado inferiormente ni superiormente, o sea, $\sup X = +\infty$ e $\inf X = -\infty$.
1.3. Demuéstrese que el conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales no está acotado superiormente, o sea, $\sup X = +\infty$.
1.4. Demuéstrese la afirmación siguiente: *cualesquiera que sean los números a y b, $0 < a < b$, existe tal número entero $n > 0$ que $an > b$.*
1.5. Sean X e Y dos conjuntos numéricos no vacíos. Demuéstrese que si $Y \subset X$, entonces $\sup X \geqslant \sup Y$.
1.6. Sean X e Y dos conjuntos numéricos no vacíos. Demuéstrese que $\sup \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \sup X + \sup Y$.
1.7. Resuélvase la ecuación $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$.
1.8. Resuélvase la ecuación $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$.
1.9. Resuélvase la ecuación $|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x = 2$.
1.10. Resuélvase la ecuación $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$.
1.11. Resuélvase las ecuaciones, anulando los módulos:
1) $|x + 4| = |x - 4|$; 2) $|x - 1| + |1 - 2x| = 2|x|$; 3) $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$.
1.12. Resuélvase la inecuación $||x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$.
1.13. Resuélvase la inecuación $|x - 3| + |x + 3| > 8$ anulando el módulo.
1.14. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que $4^n > n^2$ para todo n natural.
1.15. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que $n! > 2^n$ para $n > 3$.
1.16. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuestre las desigualdades $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ para $n > 1$.
1.17. Hállese la suma $1 + 3 + 6 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
1.18. Hállese la suma $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO

La geometría analítica es el campo de la matemática que estudia las representaciones geométricas por métodos algebraicos. En el siglo XVII el matemático francés Descartes desarrolló y por primera vez utilizó el método de las coordenadas que dio la posibilidad de vincular unos con otros los conceptos geométricos y algebraicos.

§ 1. Método de las coordenadas

El método de las coordenadas se basa en la construcción de un sistema de coordenadas. Existen muchos tales sistemas. Vamos

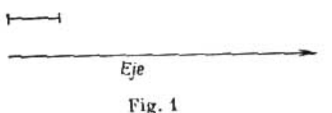


Fig. 1

a familiarizarnos con los sistemas rectangular (o cartesiano) y polar de coordenadas.

1. Segmentos orientados y sus valores. Identidad fundamental. Recuérdese que el conjunto de los puntos de una recta formado por dos puntos de frontera y por todos los puntos que están entre ellos se llama *segmento*.

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría analítica es el de segmento orientado.

Consideremos una recta arbitraria. Señalemos sobre ella dos direcciones recíprocamente contrarias. Elijamos una de ellas y designémosla en la figura con una flecha (fig. 1). Supongamos, además, que está escogida la unidad de escala para medir las longitudes de los segmentos.

La recta con la dirección elegida sobre ella se denomina *eje* [1]).

Vamos a considerar sobre el eje dos puntos arbitrarios A y B.

---

[1]) Aquí y a continuación se supone que el eje está dispuesto horizontalmente y su dirección positiva es la de izquierda a derecha.

Definición 1. *El segmento con los puntos de frontera A y B se dice orientado si se señala cuál de los puntos A y B se considera como origen del segmento y cuál de ellos, como su fin.*

Designemos por $\overline{AB}$ [1] el segmento orientado con el origen en el punto A y con el fin en el punto B y consideraremos que este segmento está orientado desde el origen hacia el fin.

En la notación $\overline{AB}$ la letra que designa el origen del segmento orientado se escribe la primera y la que designa su fin, la segunda.

La longitud del segmento orientado $\overline{AB}$ se indica así: $|\overline{AB}|$ o $|AB|$.

Para los segmentos orientados que están sobre el eje introduzcamos un concepto importante de magnitud del segmento orientado.

Definición 2. *Se llama magnitud AB del segmento orientado $\overline{AB}$ al número real que es igual a $|\overline{AB}|$ si las direcciones del segmento y del eje coinciden, e igual a $-|\overline{AB}|$ si estas direcciones son opuestas.*

De la definición se deduce que cualquiera que sea la dirección del eje las magnitudes de los segmentos orientados no se distinguen sino por los signos:

$$AB = -BA.$$

Fig. 2

Notemos que $|\overline{AB}|$ y $|\overline{BA}|$ designan el mismo número.

Supongamos que se da cualquier eje, la unidad de escala y los puntos A, B, C y D situados de modo que la distancia entre A y B sea igual a dos y entre C y D, a tres (fig. 2). Entonces la dirección del segmento orientado $\overline{AB}$ y del eje coinciden y la dirección del segmento orientado $\overline{CD}$ y del eje es contraria. Por consiguiente, $AB = |\overline{AB}| = 2$, $CD = -|\overline{CD}| = -3$. Si consideramos los segmentos orientados $\overline{BA}$ y $\overline{DC}$, entonces $BA = -|\overline{BA}| = -2$, $DC = |\overline{DC}| = 3$. En este caso $|\overline{BA}| = |\overline{AB}| = 2$ y $|\overline{CD}| = |\overline{DC}| = 3$.

Si los puntos A y B del segmento orientado $\overline{AB}$ coinciden, la magnitud del segmento definido $\overline{AB}$ es igual a cero y su sentido no está determinado.

A continuación llamaremos simplemente *segmentos* a los segmentos orientados del eje omitiendo la palabra «orientados».

Identidad fundamental. *Para todos tres puntos A, B y C situados sobre el eje el valor del segmento $\overline{AC}$ es igual a la suma de los valores de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$,* o sea,

$$AB + BC = AC. \qquad (1)$$

[1]) A veces se designa $\overrightarrow{AB}$.

□ Vamos a **demostrar** la identidad fundamental. Supongamos primero que los puntos A, B y C son distintos. Entonces para demostrar la igualdad (1) es necesario considerar seis casos de situación recíproca de los puntos A, B y C sobre el eje [1] (fig. 3). El caso I es evidente. Examinemos, por ejemplo, el caso II. Tenemos $AB - CB = AC$. Pero $CB = BC$. Por lo tanto, $AB + BC = AC$, o sea, hemos obtenido la igualdad (1). Los demás casos se demuestran de un modo análogo.

Fig. 3

Supongamos ahora que algunos de los puntos A, B y C coinciden, por ejemplo, el punto B coincide con el punto A. Entonces

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC,$$

o sea, una vez más se obtiene la igualdad (1).

Así pues, queda establecido que la igualdad (1) es realmente válida cualquiera que sea la situación de los puntos A, B y C sobre el eje. ■

2. Coordenadas sobre la recta. Recta numérica. Consideremos una recta cualquiera. Escojamos sobre ella la dirección (entonces llegará a ser eje) y cierto punto O (origen de coordenadas). La recta con la dirección elegida y con el origen de coordenadas se denomina *recta de coordenadas* (en este caso suponemos que la unidad de escala está elegida).

Fig. 4

Sea M un punto arbitrario sobre la recta de coordenadas (fig. 4). Pongamos en correspondencia al punto M el número real x, igual al valor OM del segmento $\overline{OM}$: $x = OM$. El número x se llama *coordenada* del punto M. De la definición de la magnitud del segmento se deduce que si la dirección del segmento $\overline{OM}$ coincide con la del eje, el punto M está situado a la derecha del punto O y la coordenada x es positiva; en cambio, si no coincide, el punto M está situado a la izquierda del punto O y la coordenada x es negativa y, por último, si el punto M coincide con el punto O, la coordenada x es igual a cero.

El hecho de que el punto M tiene la coordenada x se escribe simbólicamente en la forma $M(x)$.

De esta manera, a cada punto de la recta de coordenadas le corresponde cierto número real. Es válido también lo inverso: a cada punto

[1] Puesto que de tres puntos se puede componer $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutaciones.

real x le corresponde cierto punto sobre la recta de coordenadas y precisamente tal punto M cuya coordenada es igual a x. Tal correspondencia se denomina *biunívoca*.

Así pues, los números reales pueden ser representados por los puntos de la recta de coordenadas, o sea, la recta de coordenadas sirve de representación del conjunto de todos los números reales. Por eso el conjunto de todos los números reales se denomina *recta numérica* [1]) y todo número, punto de esta recta. Sobre la recta numérica cerca del punto suele indicarse el número, o sea, su coordenada.

La representación de los números reales en forma de puntos de la recta numérica hace geométricamente evidente la noción de números y de sus propiedades. A los intervalos numéricos les correspon-

Fig. 5

Fig. 6

den geométricamente los intervalos sobre la recta numérica. Por ejemplo, el segmento $[a, b]$ se representa sobre la recta numérica por el segmento $\overline{M_1M_2}$ en forma de los puntos M (x) situados entre dos puntos M_1 y M_2 (fig. 5), uno de los cuales representa el número a (tiene la coordenada a) y el otro, el número b (tiene la coordenada b), o sea, para todo $x \in [a, b]$ se cumplen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$.

Consideremos un ejemplo más. La propiedad 13ª de continuidad de los números reales tiene un sentido geométrico simple. Efectivamente, si tomamos la recta numérica, en ella cada punto $x \in X$ está dispuesto a la izquierda de cada punto $y \in Y$. Por eso el conjunto X está situado por completo a la izquierda del conjunto Y. Conforme a la propiedad de continuidad entre los conjuntos X e Y hay un punto c que «separa un conjunto del otro» (fig. 6). En este caso el punto c puede pertenecer tanto al conjunto X como al conjunto Y o no pertenecer a ninguno de ellos. Ahora bien, la recta numérica parece ser una línea continua sin «huecos». Cualquiera que sea el lugar donde hemos «cortado» la recta formando dos partes, el corte pasará por uno de los puntos de la recta.

Sea a un número arbitrario de la recta numérica y δ [2]), un número positivo. El intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ se llama *δ-entorno del punto a* (fig. 7).

Sobre la recta numérica el conjunto acotado X representa un

[1]) Cabe notar que hay muchas rectas de coordenadas, mientras que la recta numérica es una sola: el conjunto de los números reales. A veces la recta numérica se llama eje numérico.

[2]) δ es la letra griega «delta».

conjunto de puntos en el cual sirven de cotas los extremos de los intervalos que contienen todos los puntos de este conjunto.

○ **Ejemplo 1.** Construir sobre la recta numérica puntos cuyas coordenadas satisfagan las ecuaciones siguientes: 1) $|x| = 2$; 2) $|x - 1| = 3$; 3) $|2x - 3| = 2x - 3$; 4) $|1 - x| = 2$; 5) $|2 + x| = 2$.

Resolución. 1) La ecuación $|x| = 2$ es equivalente a dos ecuaciones: $x = 2$ y $x = -2$. Por consiguiente, tenemos dos puntos

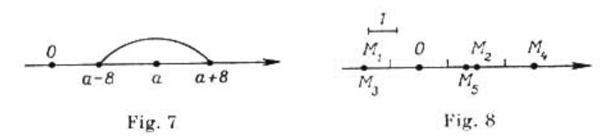


Fig. 7 Fig. 8

$M_1(-2)$ y $M_2(2)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada (fig. 8).

2) La ecuación $|x - 1| = 3$ es equivalente a dos ecuaciones: $x - 1 = 3$ y $x - 1 = -3$, de donde encontramos $x = -2$ y $x = 4$ y los puntos correspondientes $M_3(-2)$ y $M(4)$ (fig. 8), cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

3) Puesto que $|x| = x$ para $x \geqslant 0$, la igualdad dada es válida para aquellos x con los cuales $2x - 3 \geqslant 0$, de donde obtenemos $x \geqslant \frac{3}{2}$. Por lo tanto, los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada están situados a la derecha del punto $M_5\left(\frac{3}{2}\right)$, incluyendo el punto M_5. En los demás casos las resoluciones son análogas. (Constrúyanse los demás puntos por sí mismo.)

Ejemplo 2. Caracterizar la situación sobre la recta numérica de los conjuntos de puntos, cuyas coordenadas satisfacen las inecuaciones siguientes: 1) $x > 2$; 2) $x - 3 \leqslant 0$; 3) $2x - 3 \leqslant 0$; 4) $1 < x \leqslant 3$; 5) $x^2 - 9 < 0$; 6) $x^2 - 5x + 6 < 0$; 7) $12 - x < 0$; 8) $3x - 5 > 0$; 9) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 10) $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$; 11) $x^2 - 8x + 15 > 0$; 12) $x^2 - 25 < 0$; 13) $16 - x^2 \leqslant 0$. Hágase una figura para cada caso.

Resolución. 1) Los puntos están dispuestos a la derecha del punto $M_1(2)$.

2) Adicionando a cada miembro de la inecuación $x - 3 \leqslant 0$ el número 3, obtenemos $x \leqslant 3$. Por consiguiente, los puntos están situados a la izquierda del punto $M_2(3)$, incluyendo el punto M_2.

3) Adicionando a cada miembro de la inecuación $2x - 3 \leqslant 0$ el número 3 y dividiéndolos término a término por dos, obtenemos $x \leqslant \frac{3}{2}$. Por lo tanto, los puntos están a la izquierda del punto $M_3\left(\frac{3}{2}\right)$, incluyendo el punto M_3.

4) Los puntos se encuentran dentro del intervalo acotado por los puntos $M_4(1)$ y $M_5(3)$, incluyendo el punto M_5.

5) La inecuación dada es equivalente a la inecuación $x^2 < 9$. Puesto que $\sqrt{x^2} = |x|$, entonces $|x| < 3$ ó $-3 < x < 3$ (véase el teorema 1.2). Por consiguiente, los puntos están situados dentro del intervalo acotado por los puntos $M_6(-3)$ y $M_7(3)$.

6) Determinemos las raíces del trinomio que está en el primer miembro de la inecuación dada $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ y representémoslo en la forma

$$(x-2)(x-3) < 0.$$

El producto de dos factores es negativo cuando estos factores tienen los signos opuestos. Por lo tanto, son posibles dos casos:

$$\text{bien } \begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0, \end{cases} \quad \text{o bien } \begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0. \end{cases}$$

El primer sistema es incompatible (no tiene solución); la solución de la segunda es $2<x<3$. Por consiguiente, los puntos se encuentran dentro del intervalo acotado por los puntos $M_8(2)$ y $M_9(3)$. En los demás casos las resoluciones son análogas. (Háganse de manera independiente.)

Ejemplo 3. Caracterizar sobre la recta numérica el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen las inecuaciones siguientes: 1) $|x| < 1$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x| \leqslant 2$; 4) $|x-2| < 3$; 5) $|x-1| \geqslant 2$; 6) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$; 7) $|x| < x + 1$.

Resolución. 1) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-1 < x < 1$ (véase el teorema 1.2). Por lo tanto, los puntos se hallan dentro del intervalo acotado por los puntos $M_1(-1)$ y $M_2(2)$.

2) Si $|x| > \alpha$ $(\alpha > 0)$, entonces $x > \alpha$ o $x < -\alpha$ (demuestre esto por sí mismo). En el caso dado $x > 2$ ó bien $x < -2$. Por consiguiente, los puntos están situados fuera del intervalo acotado por los puntos $M_3(-2)$ y $M_4(2)$.

3) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Así pues, los puntos se encuentran dentro del intervalo limitado por los puntos $M_5(-2)$ y $M_6(2)$, incluyendo los puntos M_5 y M_6.

4) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-3 < x - 2 < 3$. Adicionando a cada miembro de estas inecuaciones el número 2, obtenemos $-1 < x < 5$. Por lo tanto, los puntos están dentro del intervalo acotado por los puntos $M_7(-1)$ y $M_8(5)$.

5) Si $|x-1| \geqslant 2$, entonces $x - 1 \geqslant 2$ ó $x - 1 \leqslant -2$. Resolviendo cada una de estas inecuaciones, obtenemos $x \geqslant 3$ ó bien $x \leqslant -1$. Por consiguiente, los puntos se encuentran fuera del intervalo acotado por los puntos $M_9(-1)$ y $_{10}(3)$, incluyendo los puntos M_9 y M_{10}.

6) Puesto que $|x| > x$ sólo cuando $x < 0$ (véase la propiedad 3ª del valor absoluto de un número), la inecuación dada es válida para las x con las cuales $x^2 - 5x + 6 < 0$. Como se desprende del ejemplo 2, caso 6), la solución de esta inecuación es $2 < x < 3$.

7) Si $x \geqslant 0$, la inecuación dada es equivalente a la inecuación $x < x + 1$, la cual se satisface con todos los valores de x. Si $x < 0$, la inecuación es equivalente a la inecuación $-x < x + 1$. Resolviéndola, obtenemos $x > -\frac{1}{2}$. Ahora bien, los puntos están situados a la derecha del punto $M_{11}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ●

Fig. 9

En conclusión vamos a demostrar dos teoremas importantes.

Teorema 2.1. *Cualesquiera que sean dos puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ siempre es válida la igualdad*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \tag{2}$$

□ **Demostración.** Consideremos tres puntos O, M_1, M_2 (fig. 9). Conforme a la identidad fundamental (1)

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

de donde

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1$$

Pero $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$. Por consiguiente, $M_1M_2 = x_2 - x_1$. ■

El teorema tiene un sentido simple: para hallar el valor M_1M_2 del segmento $\overline{M_1M_2}$ es necesario de la coordenada de su extremo restar la coordenada de su origen.

Teorema 2.2. *Si $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ son dos puntos cualesquiera y d es la distancia entre ellos*, entonces

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{3}$$

□ **Demostración.** Según el teorema 2.1

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

Pero la distancia entre los puntos M_1 y M_2 es igual a la longitud del segmento $\overline{M_1M_2}$, o sea, al módulo de este segmento. Por consiguiente,

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \ ■$$

Observación. Puesto que los números $x_2 - x_1$ y $x_1 - x_2$ se toman en módulo, se puede escribir $d = |x_1 - x_2|$.

Teniendo en cuenta la observación, el teorema 2.2 puede enunciarse así: para hallar la distancia comprendida entre los puntos M_1 y M_2 es necesario de la coordenada de uno de ellos restar la coordenada del otro y la diferencia obtenida tomarla en módulo.

○ **Ejemplo 4.** Se dan los puntos $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$. Hallar los valores de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$.

Resolución. En virtud del teorema 2.1 tenemos

$$AB = -1-5 = -6,\quad CD = 2-(-8) = 10,$$
$$DB = -1-2 = -3.$$

Ejemplo 5. Se dan los puntos $A(3)$ y $B(-2)$. Hallar la distancia d entre ellos.

Resolución. En virtud del teorema 2.2 tenemos

$$d = |-2-3| = |-5| = 5. \bullet$$

3. Sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas en el plano. Dos ejes recíprocamente perpendiculares Ox y Oy que tienen el origen común O y la misma unidad de escala (fig. 10) forman un sistema rectangular (o cartesiano) de coordenadas en el plano.

El eje Ox se llama *eje de abscisas* y el eje Oy, *eje de ordenadas*. El punto O de intersección de los ejes se llama *origen de coordenadas*. El plano en el cual están situados los ejes Ox y Oy se llama *plano de coordenadas* y se designa Oxy.

Fig. 10

Sea M un punto arbitrario del plano. Bajemos de este punto los perpendiculares MA y MB a los ejes Ox y Oy, respectivamente. Llamaremos *coordenadas rectangulares* x e y del punto M a los valores OA y OB, de los segmentos orientados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente: $x = OA$, $y = OB$.

Las coordenadas x e y del punto M se denominan *abscisa* y *ordenada* del mismo.

El hecho de que el punto M tiene las coordenadas x e y se designa simbólicamente así: $M(x;\ y)$. En este caso la primera ordenada entre paréntesis es la abscisa y la segunda, la ordenada. El origen de coordenadas tiene las coordenadas $(0; 0)$.

De esta manera, elegido el sistema de coordenadas, a cada punto M del plano corresponde un par de números $(x; y)$, o sea, sus coordenadas rectangulares y, viceversa, a cada par de números (x, y) [1]) corresponde en el plano Oxy un punto, y sólo uno, M tal que su abscisa es igual a x y su ordenada, a y.

Así pues, el sistema rectangular de coordenadas en el plano establece la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos

[1]) Se trata de un par ordenado de números (de un conjunto ordenado) o sea de una colección de dos números en la cual se indica qué número es primero y qué número es segundo. Si $x \neq y$, los pares $(x; y)$ e $(y; x)$ son distintos, ya que en el primero de ellos el primer número es x y en el segundo, y.

los puntos del plano y el conjunto de pares de números, correspondencia que al resolver los problemas geométricos permite emplear los métodos algebraicos.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes* que se numeran por las cirfas romanas I, II, III y IV como se indica en la fig. 11.

En la fig. 11 se muestran también los signos de las coordenadas de puntos según su situación en uno u otro cuadrante.

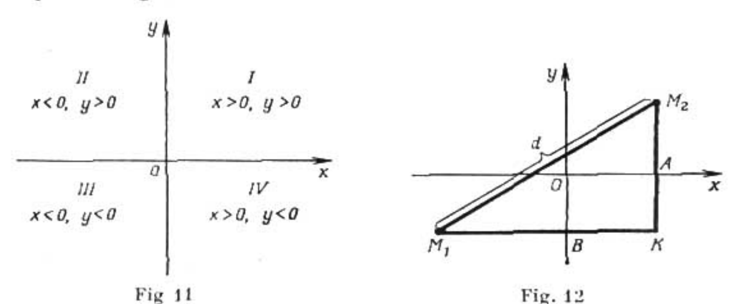


Fig 11 Fig. 12

4. Problemas elementales de la geometría analítica en el plano. Consideremos algunos problemas elementales referentes al empleo de las coordenadas rectangulares en el plano.

1. **Distancia comprendida entre dos puntos.**

Teorema 2.3. *Para cualesquiera dos puntos M_1 $(x_1; y_1)$ y M_2 $(x_2; y_2)$ del plano la distancia d comprendida entre ellos se expresa por la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

□ **Demostración.** Tracemos de los puntos M_1 y $_2$ las perpendiculares M_1B y M_2A a los ejes Oy y Ox, respectivamente, y designemos por K el punto de intersección de las rectas M_1B y M_2A (fig. 12). El punto K tiene las coordenadas $(x_2; y_1)$. Según el teorema 2.2

$$|M_1K| = |x_2 - x_1|; \quad |M_2K| = |y_2 - y_1|.$$

Puesto que el triángulo M_1M_2K es rectángulo, entonces, conforme al teorema de Pitágoras,

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1K|^2 + |M_2K|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad ■$$

○ **Ejemplo 6.** Hallar la distancia d entre los puntos M_1 $(-2; 3)$ y M_2 $(5; 4)$.

Resolución. Según la fórmula (4) tenemos

$$d = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \quad ●$$

II. **Área de un triángulo. Teorema 2.4.**
Para cualesquiera tres puntos $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$ que no estén sobre una misma recta el área S del triángulo ABC se expresa por la fórmula:

$$S = \frac{1}{2} \left| [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \right|. \tag{5}$$

□ **Demostración.** El área del triángulo ABC representado en la fig. 13 puede ser hallada así:

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}, \tag{6}$$

donde S_{ADEC}, S_{BCEF} y S_{ABFD} son las áreas de los trapecios respectivos. Puesto que

$$S_{ADEC} = |DE| \cdot \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2},$$

$$S_{BCEF} = |EF| \cdot \frac{|EC| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD} = |DF| \cdot \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2},$$

sustituyendo las expresiones para estas áreas en la igualdad (6) obtenemos la fórmula

$$S = \frac{1}{2} |[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \\ + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]|$$

de la cual, efectuadas las transformaciones poco complicadas, se deduce la fórmula (5). Para toda otra situación del triángulo ABC la fórmula (5) se demuestra de un modo análogo. ■

○ **Ejemplo 7.** Se dan los puntos $A\ (1;\ 1)$, $B\ (6;\ 4)$ y $C\ (8;\ 2)$. Hallar el área S del triángulo ABC.

Resolución. Según la fórmula (5)

$$S = \frac{1}{2} |[(6 - 1)(2 - 1) - (8 - 1)(4 - 1)]| = \frac{1}{2} |[-16]| = 8.$$

Así pues, $S = -8$. ●

III. **División de un segmento en una razón dada.** Supongamos que sobre el plano se da un segmento arbitrario M_1M_2 y sea M todo punto de este segmento distinto del punto M_2 (fig. 14).

El número λ definido por la igualdad

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$$

se llama *razón* en la que el punto M **divide** al segmento M_1M_2.

El problema de división del segmento en una razón dada consiste en que, dada la razón λ y dadas las coordenadas de los puntos M_1 y M_2, hallar las coordenadas del punto M.

El siguiente teorema permite resolver este problema.

Teorema 2.5. *Si el punto M $(x; y)$ divide al segmento M_1M_2 en una razón λ, las coordenadas de este punto se definen por las fórmulas*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{7}$$

donde $(x_1; y_1)$ son las coordenadas del punto M_1; $(x_2; y_2)$, las coordenadas del punto M_2.

□ **Demostración.** Supongamos que la recta M_1M_2 no es perpendicular al eje Ox. Bajemos las perpendiculares de los puntos con M_1,

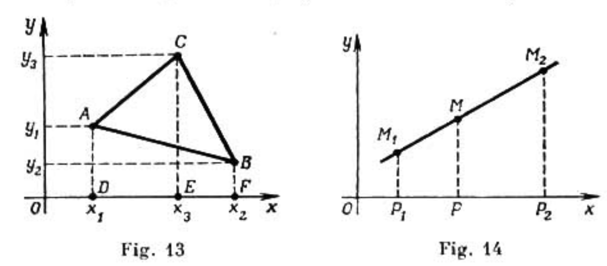


Fig. 13 Fig. 14

M, M_2 al eje Ox y designemos los puntos de su intersección el eje Ox por P_1, P y P_2, respectivamente (fig. 14). En virtud del teorema de la geometría elemental sobre la proporcionalidad de los segmentos de rectas comprendidos entre las rectas paralelas tenemos

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda.$$

Pero, según el teorema 2.2,

$$|P_1P|=|x-x_1|, \quad |PP_2|=|x_2-x|.$$

Puesto que los números $(x-x_1)$ y (x_2-x) tienen el mismo signo (para $x_1<x_2$ son positivos y para $x_1>x_2$ son negativos), entonces $\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. Por eso $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, de donde $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. Si la recta M_1M_2 es perpendicular al eje Ox, entonces $x_1=x_2=x$ y esta fórmula es, evidentemente, también justa. Hemos hallado la primera de las fórmulas (7). La segunda fórmula se determina de un modo análogo. ■

Corolario. *Si M_1 $(x_1; y_1)$ y M_2 $(x_2; y_2)$ son dos puntos arbitrarios y el punto M (x, y) es el punto medio del segmento M_1M_2, o sea,*

$|M_1M| = |MM_2|$ *entonces* $\lambda = 1$ *y según las fórmulas* (7) *obtenemos*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Así pues, *cada coordenada del punto medio del segmento es igual a la semisuma de las coordenadas respectivas.*

○ **Ejemplo 8.** Se dan los puntos M_1 (1; 1) y M_2 (7; 4). **Hallar** el punto M $(x; y)$ que es dos veces más próximo a M_1 que a M_2.

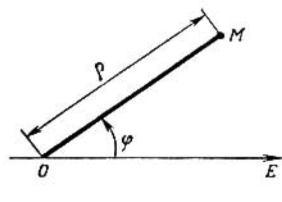


Fig. 15

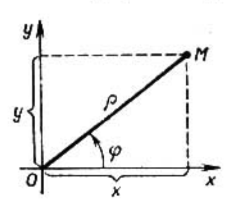


Fig. 16

Resolución. El punto buscado M divide al segmento M_1M_2 en la razón $\lambda = \frac{1}{2}$. Aplicando las fórmulas (7), encontramos las coordenadas de este punto $x = 3$, $y = 2$.

5. Coordenadas polares. Consideremos ahora el sistema polar de coordenadas. Este sistema se compone de cierto punto O, llamado *polo*, y de una semirrecta OE, llamada *eje polar*, que parte de este punto. Además, se asigna la unidad de escala para medir las longitudes de los segmentos.

Supongamos que se da un sistema polar de coordenadas y sea M un punto arbitrario del plano. Designemos con ρ la distancia entre el punto M y el punto O y con φ, el ángulo en el que es necesario girar, en sentido antihorario, el eje polar para que éste coincida con la semirrecta OM (fig. 15).

Se llaman *coordenadas polares* del punto M a los números ρ y φ. El número ρ se considera primera coordenada y se denomina *radio polar* y el número φ es la segunda coordenada y se denomina *ángulo polar*.

El punto M con las coordenadas polares ρ y φ se designa así: M $(\rho; \varphi)$.

Por lo general, se supone que las coordenadas polares ρ y φ varían en los límites siguientes: $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Sin embargo, en una serie de casos han de considerarse ángulos mayores que 2π, así como ángulos negativos, o sea, los ángulos que se miden a partir del eje polar en el sentido de las agujas del reloj.

Vamos a establecer la relación entre las coordenadas polares de un punto y sus coordenadas rectangulares. En este caso supondremos que el origen del sistema rectangular de coordenadas esté en el polo y el semieje positivo de abscisas coincida con el eje polar. Sea que el punto M tenga las coordenadas rectangulares x e y y las coordenadas polares ρ y φ (fig. 16). Es obvio que

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi. \tag{8}$$

Las fórmulas (8) expresan las coordenadas rectangulares a través de las polares y la expresión de las coordenadas polares a través de las rectangulares se desprende de estas fórmulas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{9}$$

La fórmula $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ determina dos valores del ángulo polar φ, ya que φ varía entre 0 y 2π. De estos dos valores del ángulo φ se elige el que permite satisfacer las igualdades (8).

○ **Ejemplo 9.** Se dan las coordenadas rectangulares de un punto (2; 2). Hallar sus coordenadas polares considerando que el polo coincide con el origen del sistema polar de coordenadas y el eje polar coincide con el semieje positivo de las abscisas.

Resolución. Según las fórmulas (9) tenemos $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Conforme a la segunda de estas igualdades, $\varphi = \pi/4$ ó $\varphi = 5\pi/4$. Pero puesto que $x = 2 > 0$ e $y = 2 > 0$, es necesario tomar $\varphi = \pi/4$. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿A qué se llama segmento orientado y su valor?
2. ¿A qué se llama identidad básica? Demuéstrela.
3. ¿A qué se llama eje y recta de coordenadas?
4. ¿Por qué el conjunto de todos los números reales se denomina recta numérica?
5. Muéstrese el significado geométrico de la propiedad de continuidad de los números reales.
6. ¿A qué son iguales la magnitud del segmento orientado y la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica?
7. ¿Qué es el sistema rectangular de coordenadas?
8. Muéstrese cómo con ayuda del sistema rectangular de coordenadas se establece la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números (x, y).
9. Cítense problemas elementales de la geometría analítica que se resuelven por el método de coordenadas.
10. ¿Qué es el sistema polar de coordenadas?
11. Muéstrese la relación existente entre el sistema rectangular y el sistema polar de coordenadas.

§ 2. Conjuntos de los puntos de un plano y sus ecuaciones

1. Definición de la ecuación de la línea. Consideremos la relación de la forma

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

que liga las variables x e y. La igualdad de la forma (1) vamos a llamarla *ecuación con dos variables* x, y si esta igualdad es válida no para todos los pares de números x e y. Ejemplos de las ecuaciones: $2x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - 1 = 0$.

Si (1) es válida para todos los pares de números x e y, ella se llama *identidad*. Los ejemplos de las identidades $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$.

Llamaremos *ecuación del conjunto de los puntos* $(x; y)$ a la ecuación (1) si a esta ecuación le satisfacen las coordenadas x e y de todo punto del conjunto y no le satisfacen las coordenadas de ningún punto no pertenecientes a este conjunto.

El concepto de ecuación de la línea es un concepto importante de la geometría analítica. Supongamos que en un plano se dan el sistema rectangular de coordenadas y cierta línea L (fig. 17).

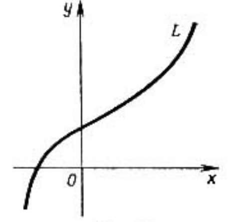


Fig. 17

Definición. *La ecuación* (1) *se llama ecuación de la línea* L *(en el sistema de coordenadas dado) si a ella le satisfacen las coordenadas* x *e* y *de todo punto que esté sobre la línea* L *y no le satisfacen las coordenadas de ningún punto que no esté sobre esta línea.*

De la definición se deduce que la línea L es el conjunto de todos los puntos del plano (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1).

Si (1) es la ecuación de la línea L, diremos que la ecuación (1) *define* (*asigna*) la línea L.

La línea L puede definirse no sólo por la ecuación de la forma (1) sino también por la ecuación de la forma

$$F(\rho, \varphi) = 0$$

que contiene las coordenadas polares.

Consideremos algunos ejemplos elementales en que las líneas se definen por las ecuaciones.

○ 1) $x - y = 0$. Escribiendo esta ecuación en la forma $y = x$, concluimos que el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación representa las bisectrices de los cuadrantes I y III. Es la línea definida por la ecuación $x - y = 0$ (fig. 18).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Representando esta ecuación en la forma $(x-y) \times \times (x+y) = 0$, concluimos que el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación son dos rectas que contienen las bisectrices de los cuatro cuadrantes (fig. 19).

3) $x^2 + y^2 = 0$. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación se compone de un solo punto (0; 0). En el caso dado la ecuación determina la línea degenerada.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Puesto que para cualesquiera x e y, los números x^2 e y^2 son no negativos, entonces $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Por lo

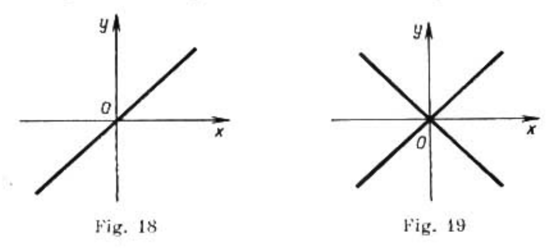


Fig. 18 Fig. 19

tanto, no hay ningún punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada, o sea, ésta no define ninguna imagen geométrica en el plano. La ecuación en cuestión define un conjunto «vacío» de los puntos.

5) $\rho = a \cos \varphi$, donde a es un número positivo y las variables ρ y φ son las coordenadas polares. Designemos con M el punto con las coordenadas polares $(\rho; \varphi)$ y con A, el punto con las coordenadas polares $(a; 0)$ (fig. 20). Si $\rho = a \cos \varphi$, donde $0 < \varphi < \pi/2$, entonces el ángulo OMA es recto e inversamente. Por consiguiente, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación dada es la circunferencia de diámetro OA (fig. 20).

6) $\rho = a\varphi$, donde a es un número positivo, ρ y φ son las coordenadas polares. Designemos con M el punto con las coordenadas polares $(\rho; \varphi)$. Si $\varphi = 0$, entonces $\rho = 0$. Ahora bien, al aumentar el ángulo φ el punto M $(\rho; \varphi)$, que ha comenzado su movimiento en el polo, se mueve en torno a éste alejándose simultáneamente del polo. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación $\rho = a\varphi$ se llama *espiral de Arquímedes* (fig. 21). En este caso se supone que φ puede tomar todos los valores no negativos.

Si el punto M efectúa una revolución completa alrededor del polo, φ crece en 2π y ρ, en $2a\pi$, o sea, la espiral corta a toda recta que pasa por el polo en segmentos iguales (sin contar el segmento que comprende el polo) que tienen la longitud de $2a\pi$. ●

En los ejemplos considerados por la ecuación dada de la línea hemos investigado sus propiedades y de esta manera hemos establecido qué representa esta línea.

Vamos a considerar ahora el problema inverso: para un conjunto de puntos (definido por cualesquiera propiedades suyas), o sea, para la línea dada L hallar la ecuación de la misma.

○ **Ejemplo 1.** Deducir (en el sistema rectangular dado de coordenadas) la ecuación del conjunto de los puntos cada uno de los cuales

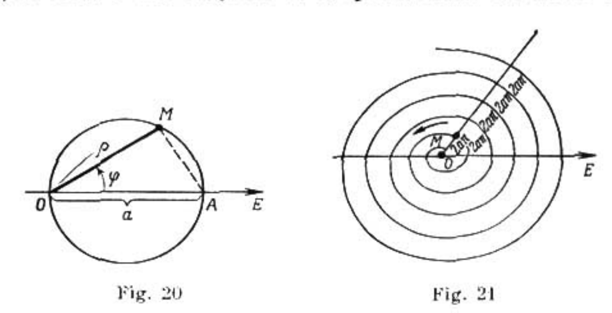


Fig. 20 Fig. 21

está alejado del punto C (α; β) a la distancia R. En otras palabras, deducir la ecuación de la circunferencia de radio R que tiene por centro el punto C (α; β) (fig. 22).

Resolución. La distancia entre el punto arbitrario M (x; y) y el punto C se calcula con ayuda de la fórmula $|MC| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Si el punto M está sobre la circunferencia, entonces $|MC| = R$ o $MC^2 = R^2$, o sea, las coordenadas del punto M satisfacen la ecuación

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2. \tag{2}$$

En cambio, si el punto M (x; y) no se encuentra sobre la circunferencia dada, entonces $MC^2 \neq R^2$, o sea, las coordenadas del punto M no satisfacen la ecuación (2). Ahora bien, la ecuación buscada de la circunferencia tiene la forma (2). Suponiendo en (2) $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, obtenemos la ecuación de la circunferencia de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas:

$$x^2 + y^2 = R^2. \bullet$$

2. Ejemplos referentes a la determinación de los conjuntos de los puntos. Consideremos algunos ejemplos más relativos a la determinación de los conjuntos de los puntos con ayuda de las ecuaciones e inecuaciones que ligan sus coordenadas.

● **Ejemplo 2.** Hallar un conjunto de los puntos (x; y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $|x| + |y| = 1$.

Resolución 1. Puesto que $|-m| = |m|$, entonces junto con el punto (a; b) al conjunto buscado pertenecen también los puntos

$(-a; b)$, $(-a; -b)$, $(a; -b)$. Esto quiere decir que Ox y Oy son los ejes de simetría del conjunto buscado. Por eso hallamos su parte situada en el cuadrante I y obtenemos lo demás reflejando simétricamente esta parte respecto a los ejes de coordenadas.

En la cuadrante I $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, por eso $|x| = x$, $|y| = y$ y la ecuación dada toma la forma $x + y = 1$. Dibujando la parte de esta recta situada en el cuadrante I y reflejándola simétricamente

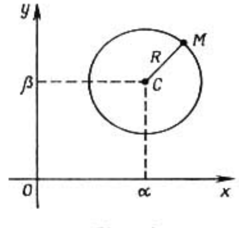


Fig. 22

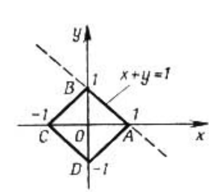


Fig. 23

respecto a los ejes Ox y Oy, obtenemos el conjunto buscado, o sea, el cuadrado representado en la fig. 23.

Resolución 2. Consideremos la ecuación $|x| + |y| = 1$ en los cuadrantes.

1) En el cuadrante I $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, por eso $|x| = x$ e $|y| = y$ y la ecuación toma la forma $x + y = 1$. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es una recta. Por lo tanto, al conjunto buscado de los puntos del cuadrante I pertenece el trozo AB de esta recta (fig. 23).

2) En el cuadrante II $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, por eso $|x| = -x$, $|y| = y$ y la ecuación toma la forma $-x + y = 1$. Ahora bien, en los límites del cuadrante II al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo BC de la recta $-x + y = 1$.

3) En el cuadrante III $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, por eso $|x| = -x$, $|y| = -y$ y la ecuación toma la forma $-x - y = 1$. Por lo tanto, en el cuadrante III al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo CD de la recta $-x - y = 1$.

4) En el cuadrante IV $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, por eso $|x| = x$, $|y| = -y$ y la ecuación toma la forma $x - y = 1$. Por consiguiente, en el cuadrante IV el conjunto buscado de los puntos es el trozo DA de la recta $x - y = 1$, trozo que cierra el cuadrado $ABCD$. ●

Al resolver los ejemplos, es necesario prestar atención a la simetría del conjunto buscado de los puntos respecto a los ejes de coordenadas.

○ **Ejemplo 3.** Hallar el conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $|x| - |y| = 1$.

Resolución. Puesto que el conjunto buscado de los puntos es simétrico respecto a los ejes de coordenadas Oy y Ox, se puede utilizar cualquiera de las dos resoluciones dadas en el ejemplo 2. Para mayor brevedad, consideremos la primera resolución. En el cuadrante I la ecuación $|x| - |y| = 1$ toma la forma $x - y = 1$. Por consiguiente, en el cuadrante I al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo AB de la recta $x - y = 1$ y al reflejarlo simétricamente

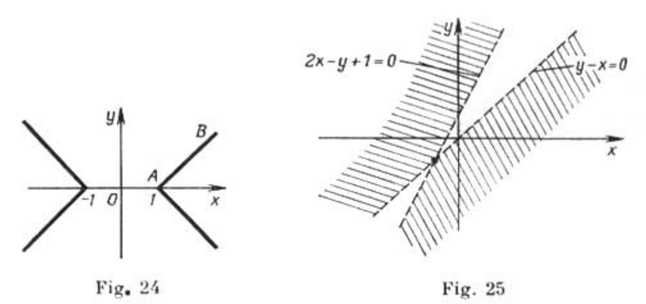


Fig. 24 Fig. 25

respecto a los ejes de coordenadas obtenemos todo el conjunto buscado de los puntos, representado en la fig. 24.

(Haga por sí mismo la segunda resolución de este ejemplo).

Ejemplo 4. Hallar el conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la inecuación $(x - 2y)(2x - y + 1) > 0$.

Resolución. El producto de dos factores es positivo si, y sólo si, ellos tienen los signos iguales, o sea,

$$\begin{cases} x - y > 0, \\ 2x - y + 1 > 0 \end{cases} \tag{3}$$

o bien

$$\begin{cases} x - y < 0, \\ 2x - y + 1 < 0. \end{cases} \tag{4}$$

La inecuación de primer grado $Ax + By + C > 0$ da un semiplano limitado por la recta $Ax + By + C = 0$ (véase el § 3, subp. 4). Por eso la resolución de cada uno de los sistemas (3) y (4) es la intersección de los semiplanos respectivos; obtenemos la respuesta: un par de ángulos verticales representado en la fig. 25.

Ejemplo 5. Mostrar que la ecuación $x^2 + 2x + y^2 = 0$ define en el plano cierta circunferencia. Hallar su centro y su radio.

Resolución. Representemos la ecuación dada en la forma

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1 \text{ ó bien } (x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

Ahora está claro que ésta es la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C(-1; 0)$ y por radio 1.

Ejemplo 6. Establecer qué conjunto de los puntos es definido por la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 4x + 4y$.

Resolución. Escribamos está inecuación en la forma

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leqslant 8 \text{ o bien}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 8.$$

Esta inecuación muestra que la distancia entre cada punto del conjunto buscado y el punto (2; 2) es menor o igual a $\sqrt{8}$. Es evidente que los puntos que satisfacen esta ecuación llenan el círculo de radio $\sqrt{8}$ que tiene por centro el punto (2; 2) Puesto que en la inecuación se admite la igualdad, la frontera del círculo también pertenece al conjunto buscado.

Ejemplo 7. En un plano se dan los puntos A y B. Hallar el conjunto de los puntos M que están dos veces más distantes de A que de B.

Resolución. Elijamos un sistema de coordenadas en el plano de un modo que el origen de coordenadas coincida con el punto A y el semieje positivo de abscisas pase de A a B. Tomemos por unidad de escala la longitud del segmento AB. Entonces el punto A tiene las coordenadas (0; 0) y el punto B, las coordenadas (1; 0). Designemos las coordenadas del punto M por $(x; y)$. Escribamos las condiciones $|AM| = 2|BM|$ en las coordenadas así:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Aquí hemos utilizado la fórmula (4) del § 1. Se ha obtenido la ecuación del conjunto buscado de los puntos. Para comprender qué conjunto se describe por esta ecuación la transformamos de modo que tome la forma conocida. Elevando al cuadrado ambos miembros, suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la ecuación equivalente

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0.$$

Esta igualdad puede ser escrita en la forma:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9}$$

o en la forma siguiente::

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

La última ecuación es la de la circunferencia que tiene por centro el punto $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ y por radio $\frac{2}{3}$. Ahora bien, el conjuntobuscado de los puntos es la circunferencia (o una parte suya).

Para la resolución no tiene importancia el que $|AM|$ sea precisamente dos veces mayor que $|BM|$, por eso de hecho está resuelto el problema general. Precisamente queda demostrado que el conjunto de los puntos M, que tiene constante la razón de las distancias a los puntos dados A y B

$$\frac{|AM|}{|BM|} = k$$

(k es el número positivo asignado, no igual a 1), es la circunferencia.

Hemos excluido el caso $k = 1$. En este caso el conjunto buscado es la recta (el punto M es equidistante de los puntos A y B). (Demuestre esto analíticamente.) ●

Los ejemplos considerados muestran cómo el método de coordenadas permite emplear los métodos algebraicos para resolver los problemas geométricos. Ahora consideremos el ejemplo cuando un problema algebraico puede resolverse geométricamente con ayuda del método de coordenadas.

○ **Ejemplo 8.** Determinar para qué valores del parámetro a el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

no tiene soluciones, tiene una única solución, tiene un conjunto infinito de soluciones. ¿Qué casos más son posibles?

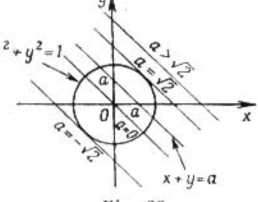


Fig. 26

Resolución. La primera ecuación del sistema es la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el origen de coordenadas y por radio 1. La segunda ecuación es la de la recta que intercepta en los ejes los segmentos iguales a a. Resolver el sistema quiere decir que es necesario hallar los puntos cuyas coordenadas satisfacen tanto la primera ecuación como la segunda, o sea, encontrar los puntos de intersección de la recta $x + y = a$ y de la circunferencia. De la fig. 26 se deduce que para $a > \sqrt{2}$ y para $a < -\sqrt{2}$ la recta no corta la circunferencia, o sea, el sistema no tiene soluciones; para $a = \pm\sqrt{2}$ obtenemos las tangentes a la circunferencia, o sea, el sistema tiene la única (doble) solución; para $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ la recta corta la circunferencia, o sea, el sistema tiene dos soluciones. Otros casos no pueden existir. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿A qué se llama ecuación con dos variables e identidad? Cítense ejemplos
2. Dése la definición de la ecuación de la línea y de la misma línea. Cítense. ejemplos.
3. Dedúzcase la ecuación de la circunferencia que tiene por centro un punto dado.

§ 3. Rectas y ecuaciones lineales

1. Ecuación de la recta con un coeficiente angular. Supongamos que se da cierta recta, no perpendicular al eje Ox. Llamaremos *ángulo de inclinación* de la recta dada respecto al eje Ox, al ángulo α en el que es necesario girar el eje Ox para que el sentido positivo coincida con uno de los sentidos de la recta. El ángulo α puede tener diferentes valores que se distinguen entre sí en una magnitud igual a $\pm n\pi$, donde n es un número natural. Por lo general, por ángulo de inclinación se toma el valor mínimo no negativo del ángulo α en el que hay que hacer girar (en el sentido contrario a las agujas del reloj) al eje Ox para que su sentido positivo coincida con uno de los sentidos de la recta (fig 27). En este caso $0 \leqslant \alpha < \pi$.

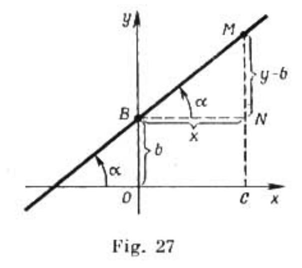


Fig. 27

La tangente del ángulo de inclinación de la recta respecto al eje Ox se denomina *coeficiente angular* (pendiente) de esta recta y se designa con letra k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

De la fórmula (1), en particular, se desprende que si $\alpha = 0$, o sea, la recta es paralela al eje Ox, entonces $k = 0$. Si $\alpha = \pi/2$, o sea, la recta es perpendicular al eje Ox, la expresión $k = \operatorname{tg} \alpha$ pierde el significado. En tal caso se dice que el coeficiente angular «se convierte en infinito».

Deduzcamos la ecuación de la recta dada si se conocen su coeficiente angular k y la magnitud b del segmento OB [1]) que la recta intercepta sobre el eje Oy (véase la fig. 27).

Designemos por M un punto arbitrario del plano con las coordenadas x e y. Si trazamos las rectas BN y NM paralelas a los ejes, se forma un triángulo rectángulo BNM. El punto M está sobre la recta si, y sólo si, los valores de NM y BN satisfacen la condición

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pero $NM = CM - CN = CM - OB = y - b$, $BN = x$. De donde, teniendo en cuenta la fórmula (1), obtenemos que el punto $M(x; y)$ está sobre la recta dada si, y sólo si, sus coordenadas satisfacen

---

[1]) Más exactamente, b es la magnitud del segmento orientado $\overline{OB}$ sobre el eje Oy. Sin embargo, para mayor brevedad diremos simplemente «magnitud del segmento OB».

la ecuación

$$\frac{y-b}{x}=k$$

que, después de las transformaciones, toma la forma

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

La ecuación (2) se llama *ecuación de la recta con coeficiente angular.* Si $k = 0$, la recta es paralela al eje Ox y su ecuación tiene la forma $y = b$.

Así pues, toda recta, no perpendicular al eje Ox, tiene la ecuación de la forma (2). Es obvio, que es justo también lo inverso: toda ecuación de la forma (2) define la recta que tiene el coeficiente angular k e intercepta sobre el eje Oy el segmento cuyo valor es b.

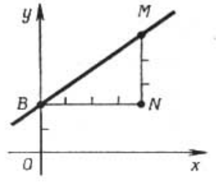


Fig. 28

○ **Ejemplo 1.** Escribir la ecuación de la recta que intercepta sobre el eje Oy el segmento $b = 3$ y forma con el eje Ox el ángulo $\alpha = \pi/6$.

Resolución. Encontramos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Sustituyendo k y b en la ecuación (2), obtenemos la ecuación buscada de la recta:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3 \text{ o bien } \sqrt{3}y-x-3\sqrt{3}=0.$$

Ejemplo 2. Construir la recta definida por la ecuación

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

Resolución. Tomemos sobre el eje Oy un segmento OB cuyo valor es igual a 2 (fig. 28). Tracemos por el punto B paralelamente al eje Ox un segmento cuyo valor $BN = 4$ y por el punto N tracemos paralelamente al eje Oy un segmento cuyo valor $NM = 3$. Luego trazamos la línea BM. Ésta es precisamente la recta buscada. Ella tiene el coeficiente angular dado $k = \frac{3}{4}$ e intercepta sobre el eje Oy el segmento cuyo valor $b = 2$. ●

2. Ecuación de la recta que pasa por un punto dado con un coeficiente angular dado. En varios casos surge la necesidad de formar la ecuación de la recta conociendo sólo un punto suyo $M_1 (x_1; y_1)$ y el coeficiente angular k. Escribamos la ecuación de la recta en la forma (2), donde b es por ahora un número desconocido. Puesto que la recta pasa por el punto $M_1 (x_1; y_1)$, las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación (2): $y_1 = kx_1 + b$. Determinando b de esta igualdad y sustituyéndolo en la ecuación (2) obtenemos la ecuación

buscada de la recta:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3}$$

Observación. Si la recta pasa por el punto $M_1(x_1; y_1)$ perpendicularmente al eje Ox, o sea, su coeficiente angular se convierte en infinito, la ecuación de la recta tiene la forma $x - x_1 = 0$. Formalmente esta ecuación puede ser obtenida de la ecuación (3) si ésta la dividimos por k y luego hacemos que k tienda hacia el infinito.

○ **Ejemplo 3.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(2; 1)$ y forma con el eje Ox el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Resolución. Encontramos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Sustituyendo las coordenadas dadas y el valor del coeficiente angular k en la ecuación (3), obtenemos la ecuación de la recta buscada:

$$y - 1 = x - 2 \quad \text{o bien} \quad y - x + 1 = 0. \quad ●$$

3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. Supongamos que se dan dos puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$.

Tomando en (3) el punto $M(x; y)$ por $M_2(x_2; y_2)$, obtenemos

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Determinando k de la última igualdad y sustituyéndolo en la ecuación (3), obtenemos la ecuación buscada de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Esta ecuación, si $y_1 \neq y_2$, se puede escribir en la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Si $y_1 = y_2$, la ecuación buscada de la recta tiene la forma $y = y_1$. En este caso la recta es paralela al eje Ox. Si $x_1 = x_2$, la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 es paralela al eje Oy y su ecuación tiene la forma $x = x_1$.

○ **Ejemplo 4.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1(3; 1)$ y $M_2(5; 4)$.

Resolución. Sustituyendo las coordenadas dadas de los puntos M_1 y M_2 en la relación (4), obtenemos la ecuación de la recta buscada:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{3} \quad \text{o bien} \quad 3x - 2y - 7 = 0. \quad ●$$

4. Ecuación general de la recta. Teorema 2.6. *En el sistema rectangular de coordenadas Oxy toda recta se define por una ecuación*

de primer grado

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

y, viceversa, la ecuación (5), *al ser arbitrarios los coeficientes* A, B, C (A *y* B *no son iguales a cero simultáneamente*), *define cierta recta en el sistema rectangular de coordenadas* Oxy.

□ **Demostración.** Primero vamos a demostrar la primera afirmación. Si una recta no es perpendicular al eje Ox, ella, como hemos mostrado en el subp. 1, es definida por la ecuación de primer grado: $y = kx + b$, o sea, por la ecuación de la forma (5), donde $A = k$, $B = -1$ y $C = b$. Si una recta es perpendicular al eje Ox, todos los puntos de ella tienen las mismas abscisas que son iguales a la magnitud a del segmento interceptado por la recta sobre el eje Ox (fig. 29). La ecuación de esta recta tiene la forma $x = a$, o sea, también es una ecuación de primer grado de la forma (5), donde $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. De este modo la primera afirmación queda demostrada.

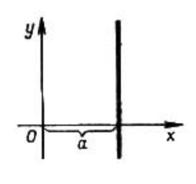


Fig. 29

Demostremos la afirmación inversa. Supongamos que se da la ecuación (5), con la particularidad de que al menos uno de los coeficientes A y B no es igual a 0.

Si $B \neq 0$, la (5) puede escribirse en la forma $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Suponiendo $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, obtenemos la ecuación $y = kx + b$, o sea, la ecuación de la forma (2) que define una recta.

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la (5) toma la forma $x = -\frac{C}{A}$. Designando $-\frac{C}{A}$ por a, obtenemos $x = a$, o sea, la ecuación de la recta que es perpendicular al eje Ox. ■

Las líneas definidas en el sistema rectangular de coordenadas por la ecuación de primer grado se llaman *líneas de primer orden*. De esta manera, cada recta es una línea de primer orden e inversamente, cada línea de primer orden es una recta.

La ecuación que tiene la forma $Ax + By + C = 0$ se denomina *ecuación general de la recta* (o bien *ecuación completa de la recta*). Para diferentes valores de A, B, C ella define las rectas de toda clase.

○ **Ejemplo 5.** Se da la ecuación general $12x - 5y - 65 = 0$. Escríbase la ecuación de la recta con un coeficiente angular.

Resolución. Resolviendo la ecuación de la recta respecto a y, obtenemos la ecuación de la recta con un coeficiente angular:

$$y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Aquí $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$. ●

5. Ecuación incompleta de primer grado. Ecuación «segmentaria» de la recta. Consideremos tres casos particulares cuando la ecuación $Ax + By + C = 0$ es incompleta, o sea, cuando cualquiera de los coeficientes es igual a cero.

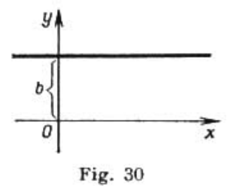


Fig. 30

1) $C = 0$; la ecuación tiene la forma $Ax + By = 0$ y define la recta que pasa por el origen de coordenadas.

2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; la ecuación tiene la forma $Ax + C = 0$ y define una recta paralela al eje Oy. Como hemos mostrado en el teorema 2.6, esta ecuación se reduce a la forma $x = a$, donde $a = -\frac{C}{A}$, a es el valor del segmento que la recta intercepta sobre el eje Ox (véase la fig. 29). En particular, si $a = 0$, la recta coincide con el eje Oy. Ahora bien, la ecuación $x = 0$ define el eje de ordenadas.

3) $A = 0$ $(B \neq 0)$; la ecuación tiene la forma $By + C = 0$ y define una recta que es paralela al eje Ox. Este hecho se determina de un modo análogo al caso precedente. Si se pone $-\frac{C}{B} = b$, la ecuación toma la forma $y = b$, donde b es el valor del segmento que la recta intercepta sobre el eje Oy (fig. 30). En particular, si $b = 0$, la recta coincide con el eje Ox. Ahora bien, la ecuación $y = 0$ define el eje de abscisas.

Supongamos ahora que se da la ecuación $Ax + By + C = 0$ con la condición de que ninguno de los coeficientes A, B, C es igual a cero. Transformemos esta ecuación de un modo tal que tenga la forma

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Introduciendo las designaciones $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, obtenemos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

La ecuación (6) se denomina *ecuación «segmentaria» de la recta.* Los números a y b son las magnitudes de los segmentos que la recta

intercepta sobre los ejes de coordenadas. Esta forma de la ecuación es cómoda para la construcción geométrica de la recta.

○ **Ejemplo 6.** Una recta se define por la ecuación $3x - 5y + 15 = 0$. Escríbase para esta recta la ecuación «segmentaria» y constrúyase la recta.

Resolución. Para la recta dada la ecuación «segmentaria» tiene la forma

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Para construir esta recta pongamos sobre los ejes de coordenadas Ox y Oy los segmentos cuyos valores son iguales a $a = -5$, $b = 3$ y tracemos la recta por los puntos $M_1(-5; 0)$ y $M_2(0; 3)$ (fig. 31). ●

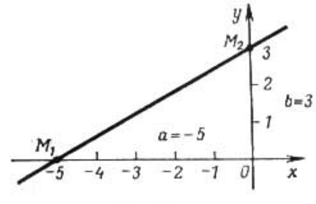


Fig. 31

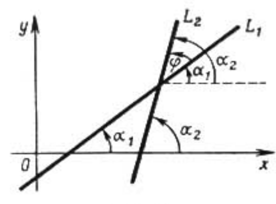


Fig. 32

6. Ángulo entre dos rectas. Consideremos dos rectas L_1 y L_2. Supongamos que la ecuación de L_1 tiene la forma $y = k_1x + b_1$, donde $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, y la ecuación L_2 tiene la forma $y = k_2x + b_2$, donde $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (fig. 32). Sea φ el ángulo entre las rectas L_1 y L_2; $0 \leqslant \varphi < \pi$.

De las consideraciones geométricas determinamos la dependencia entre los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \varphi$: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ o bien $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, de donde

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

o bien

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (7)$$

La fórmula (7) define uno de los ángulos entre las rectas. El segundo ángulo es igual a $\pi - \varphi$.

○ **Ejemplo 7.** Dos rectas se definen por las ecuaciones $y = 2x + 3$ e $y = -3x + 2$. Hállese el ángulo entre estas rectas.

Resolución. Es obvio que $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, por eso según la fórmula (7) encontramos

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-2}{1+(-3)\,2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Ahora bien, uno de los ángulos entre las rectas dadas es igual a $\pi/4$ y el otro ángulo $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$. ●

7. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, $\varphi = 0$ y $\operatorname{tg}\varphi = 0$. En este caso el numerador del segundo miembro de la fórmula (7) es igual a cero: $k_2 - k_1 = 0$, de donde

$$k_2 = k_1.$$

Así pues, la igualdad de los coeficientes angulares de dos rectas es la condición de su paralelismo.

Si dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, o sea, $\varphi = \pi/2$, de la (7) encontramos $\operatorname{ctg}\varphi = (1 + k_2k_1)/(k_2 - k_1)$. En este caso $\operatorname{ctg}\pi/2 = 0$ y $1 + k_2k_1 = 0$, de donde

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

De esta manera, la condición de perpendicularidad de dos rectas consiste en que sus coeficientes angulares son recíprocos en valor y contrarios de signo.

○ **Ejemplo 8.** Mostrar que las rectas $4x - 6y + 7 = 0$ y $20x - 30y - 11 = 0$ son paralelas.

Resolución. Reduciendo la ecuación de cada recta a la forma de la ecuación con coeficiente angular (2), obtenemos

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \text{ e } y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}.$$

Los coeficientes angulares de estas rectas son iguales a $k_1 = k_2 = 2/3$. De donde concluimos que las rectas son paralelas.

Ejemplo 9. Mostrar que las rectas $3x - 5y + 7 = 0$ y $10x + 6y - 3 = 0$ son perpendiculares.

Resolución. Reducidas las ecuaciones a la forma de la ecuación con coeficiente angular (2), resulta

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \text{ e } y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Aquí $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$. Puesto que $k_2 = -1/k_1$, las rectas son perpendiculares. ●

8. Distancia entre el punto y la recta. Teorema 2.7. *La distancia d entre el punto dado $M(x_0; y_0)$ y la recta L definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ en el plano se determina por la fórmula*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

La idea de demostrar esta fórmula consiste en lo siguiente. Consideremos sobre la recta L dos puntos arbitrarios E y F con las

coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. Calculemos la longitud del segmento EF y el área S_{MEF} del triángulo MEF (las fórmulas para determinar la longitud del segmento y el área del triángulo se conocen). Entonces la distancia del punto M a la recta L es la longitud de la altura h del triángulo MEF (fig. 33):

$$d = h = \frac{2S_{MEF}}{|EF|}.$$

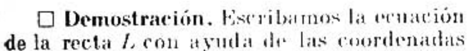


Fig. 33

□ **Demostración.** Escribamos la ecuación de la recta L con ayuda de las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ de los puntos E y F según la fórmula (4)

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

de donde

$$(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)=0. \qquad (9)$$

El área S_{MEF} del triángulo MEF se escribe según la fórmula (5) del § 2:

$$2S_{MEF} = |[(x_2-x_1)(y_0-y_1)-(x_0-x_1)(y_2-y_1)]|.$$

Además,

$$|EF| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Entonces

$$d = \frac{|[(x_2-x_1)(y_0-y_1)-(x_0-x_1)(y_2-y_1)]|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}. \qquad (10)$$

Con ayuda de la ecuación (9) expresemos ahora los coeficientes A, B, C de la ecuación $Ax+By+C=0$ de la recta L mediante las coordenadas de los puntos E e F. Para esto escribamos la ecuación (9) en la forma

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+[x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)]=0,$$

de donde obtenemos que $A=y_1-y_2$; $B=x_2-x_1$; $C=x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)$. Entonces

$$2S_{MEF}=|Ax_0+By_0+C|;\ |EF|=\sqrt{A^2+B^2}$$

y la fórmula (10) puede escribirse en la forma

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

que es lo que se quería demostrar. ■

○ **Ejemplo 10.** Supongamos que la recta L se define por la ecuación $3x-4y+10=0$ y se da el punto $M(4;3)$. Hállese la distancia d del punto M a la recta L.

Resolución. Según la fórmula (8) tenemos

$$d=\frac{|3\cdot4-4\cdot3+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

De esta manera, la distancia buscada es igual a 2. ●

9. Posición recíproca de dos rectas en un plano. Supongamos que las rectas L_1 y L_2 se definen por las ecuaciones

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}\qquad(11)$$

Consideremos estas ecuaciones como sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x e y. Resolviendo este sistema, encontramos

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Sea $A_1B_2-A_2B_1\neq0$. Entonces las fórmulas halladas dan la solución del sistema (11). Esto quiere decir que las rectas L_1 y L_2 no son paralelas y se intersecan en un punto que tiene por coordenadas $(x;\ y)$.

Sea ahora $A_1B_2-A_2B_1=0$. Son posibles dos casos: 1) $A_2C_1-A_1C_2=0$ y $B_1C_2-B_2C_1=0$; 2) $A_2C_1-A_1C_2\neq0$ $(B_1C_2-B_2C_1\neq0)$.

En el primer caso tenemos $A_2=\mu A_1$, $B_2=\mu B_1$, $C_2=\mu C_1$ o bien

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\mu,$$

donde $\mu\neq0$ es cierto número. Esto significa que los coeficientes de las ecuaciones son proporcionales, de donde se deduce que la segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicándola por el número μ. En este caso las rectas L_1 y L_2 coinciden, o sea, las ecuaciones definen la misma recta. Es evidente que el sistema (11) tiene un conjunto infinito de soluciones.

En el segundo caso si, por ejemplo, $A_2C_1-A_1C_2\neq0$, entonces, admitiendo que el sistema tiene la solución $(x_0;\ y_0)$, obtenemos una contradicción. En efecto, sustituyendo en las ecuaciones en vez de x e y los valores x_0 e y_0, multiplicando la primera ecuación por A_2, la segunda por A_1 y sustrayendo de la primera ecuación la segunda, resulta $A_2C_1-A_1C_2=0$ lo que contradice nuestra hipótesis. Ahora bien, el sistema (11) no tiene solución. En este caso las rectas L_1 y L_2 no tienen puntos de intersección, o sea, son paralelas.

Así pues, dos rectas de un plano se intersecan en un punto, o coinciden, o bien son paralelas.

Ejercicio. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x-3y-1=0$ y $3x-y-2=0$ perpendicularmente a la recta $y=x+1$. (*Resp.* $7x+7y-6=0$.)

10. Ejemplos de solución de los problemas geométricos por el método de coordenadas. Consideremos los problemas geométricos que son cómodos de resolver con ayuda del método de coordenadas y que son difíciles de resolver por métodos geométricos puros.

○ **Ejemplo 11.** Hállese el conjunto de los puntos de un plano, cuya suma de los cuadrados de las distancias a dos vértices opuestos

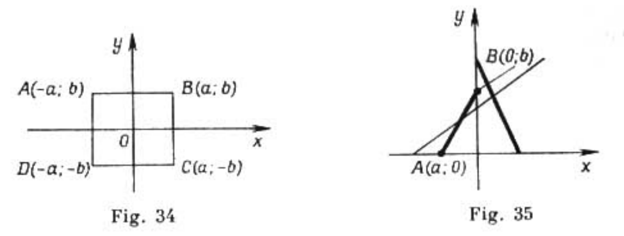


Fig. 34 Fig. 35

del rectángulo dado es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a otros dos vértices suyos.

Resolución. Introduzcamos en el plano el sistema de coordenadas de modo que su origen sea el centro del rectángulo dado (fig. 34). Sea $M(x;\ y)$ un punto arbitrario del conjunto buscado. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos (4) del § 1, tenemos

$$|MA|^2+|MC|^2=(x+a)^2+(y-b)^2+(x-a)^2+(y+b)^2,$$
$$|MB|^2+|MD|^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(x+a)^2+(y+b)^2.$$

Igualando los segundos miembros de las igualdades halladas, obtenemos la identidad $0\equiv 0$. Por consiguiente, el buscado conjunto de los puntos es todo el plano.

Ejemplo 12. Determínese qué línea se describe por el punto medio del segmento entre dos peatones que caminan por dos vías recíprocamente perpendiculares con igual velocidad.

Resolución. Supongamos que el primer peatón camina a lo largo del eje Ox a partir del punto $A\ (a;\ 0)$ con la velocidad v y el segundo, a lo largo del eje Oy a partir del punto $B\ (0;\ b)$ con la misma velocidad (fig. 35). Entonces en el instante de tiempo t el primer peatón está en el punto $(a+vt;\ 0)$ y el segundo, en el punto $(0;\ b+vt)$. Designemos con $(x;\ y)$ las coordenadas del punto medio del segmento entre los peatones. En virtud del corolario del teorema 2.5 resulta

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+vt}{2}, \\ y=\dfrac{b+vt}{2}. \end{cases}$$

Eliminemos de estas igualdades t:

$$t=\frac{2x-a}{v}\ ,\ t=\frac{2y-b}{v}\ ,$$

de donde

$$\frac{2x-a}{v}=\frac{2y-b}{v}\ \text{ o bien }\ y=x+\frac{b-a}{2}\ .$$

Ahora bien, la línea buscada es la recta que es paralela a la bisectriz del ángulo comprendido entre las direcciones del movimiento de los peatones.

Observación. Nótese que si las velocidades de los peatones no son iguales, entonces, análogamente, la ecuación obtenida de la línea buscada tendrá la forma

$$y=\frac{v_2}{v_1}\,x+\frac{bv_1-av_2}{2}\ ,$$

o sea, es también una recta, pero el ángulo de su inclinación al eje Ox es ya otro (aquí v_1 y v_2 son las velocidades del movimiento de los peatones).

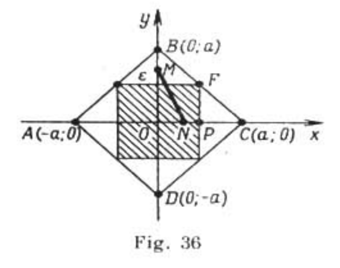


Fig. 36

Ejemplo 13. Hállese el conjunto de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos están en distintas diagonales del cuadrado.

Resolución. Elijamos el sistema de coordenadas como hemos mostrado en la fig. 36, donde $ABCD$ es el cuadrado dado. Sean los puntos $M\ (0;\ y)$ y $N\ (x;\ 0)$ puntos arbitrarios situados sobre los segmentos OB y OC (sobre las mitades de las diagonales del cuadrado), respectivamente. Entonces

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant a,\\ 0\leqslant y\leqslant a,\end{cases}$$

y el segmento MN está en el cuadrante I y los puntos medios de los segmentos MN tienen las coordenadas $(x/2;\ y/2)$, donde

$$\begin{cases}0\leqslant x/2\leqslant a/2,\\ 0\leqslant y/2\leqslant a/2,\end{cases}$$

o sea, llenan el cuadrado $OEFP$. Haciendo uso de la simetría del cuadrado dado, obtenemos que el conjunto buscado es un cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de sus lados. ●

Con ayuda del método de coordenadas se resuelven fácilmente también muchos problemas del curso escolar de matemáticas. Citemos un ejemplo.

○ **Ejemplo 14.** Se dan dos circunferencias que tienen una tangencia exterior. Determínese qué conjunto de los puntos forman los puntos, de los cuales pueden trazarse a estas circunferencias las tangentes de igual longitud.

Resolución geométrica. Los puntos pertenecientes a la recta, que es perpendicular a la línea de los centros y pasa por el punto común de estas circunferencias, poseen la propiedad indicada. Efectivamente, según la propiedad de los segmentos de tangentes trazadas de un punto a la circunferencia (fig. 37).

$$|MA| = |MC| \quad \text{y} \quad |MC| = |MB|,$$

de donde $|MA| = |MB|$.

Vamos a demostrar que los puntos no pertenecientes a esta recta no poseen la propiedad en cuestión. Para esto tomemos un punto

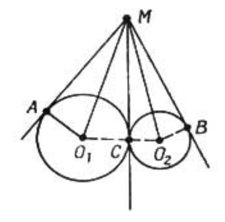


Fig. 37

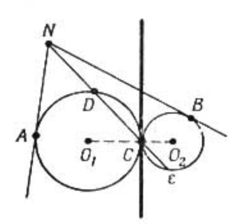


Fig. 38

arbitrario N del plano que no esté sobre la perpendicular a la línea de los centros O_1O_2, perpendicular trazada a través de C, o sea, por el punto común de dos circunferencias (fig. 38). Tracemos la recta NC. Según el teorema sobre el producto de la longitud de la secante por su parte exterior [1]) resulta

$$|NA|^2 = |NC|\,|ND| \quad \text{y} \quad |NB|^2 = |NC|\,|NE|,$$

o sea, $|NA| \neq |NB|$.

Así pues, el conjunto de los puntos buscado, de los cuales se puede trazar a estas circunferencias las tangentes de igual longitud, es una recta perpendicular a la línea de los centros que pasa por el punto común de estas circunferencias.

Surge la pregunta: ¿cuál es el conjunto de los puntos de los que se puede trazar a dos circunferencias las tangentes de igual longitud (para las circunferencias situadas arbitrariamente)?

[1]) Si de un punto que está fuera de la circunferencia están trazadas a ésta una tangente y una secante, el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la longitud de toda la secante por la longitud de su parte exterior.

Si se toman dos circunferencias que se intersecan en los puntos C y D (fig. 39), es fácil mostrar que las longitudes de las tangentes trazadas del punto M de la recta CD son iguales (se trata de aquellos puntos de esta recta, de los cuales pueden trazarse tangentes). En efecto, según el teorema sobre el producto de la longitud del segmento de la secante por su parte exterior

$$|AM|^2 = |MD|\,|MC| \quad \text{y} \quad |MB|^2 = |MD|\,|MC|.$$

Por lo tanto, $|AM| = |MB|$.

Ahora es necesario demostrar que fuera de la recta CD no hay puntos que posean la propiedad mencionada. Sin embargo, resulta que es difícil hacer esto empleando métodos geométricos puros.

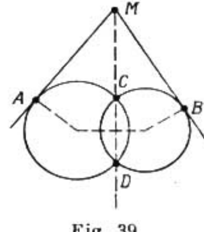


Fig. 39

En cambio, si se considera este problema para el caso de dos circunferencias que no se intersecan, resulta que en la resolución es difícil apoyarse en los teoremas citados sobre las propiedades de la tangente y hace falta buscar un nuevo método de solución. Además, es necesario tener en cuenta que el teorema sobre el cuadrado de la longitud no entra en el curso escolar obligatorio.

De esta manera, la resolución geométrica pura del problema es bastante complicada. Apliquemos el método de coordenadas. Así pues, resolvamos el problema siguiente.

Ejemplo 15 (generalización del ejemplo 14). Se dan dos circunferencias. Aclarar qué conjunto de puntos forman los puntos, de los cuales se puede trazar a estas circunferencias tangentes de igual longitud.

Resolución. Si MN y MP son los segmentos de las tangentes a las circunferencias con los centros O_1 y O_2 (fig. 40), entonces hace falta hallar el conjunto de puntos M tales que $|MN| = |MP|$. Notando que

$$|MN|^2 = |MP|^2; \quad |MN|^2 = |MO_1|^2 - |O_1N|^2;$$
$$|MP|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2,$$

escribamos los datos del problema así:

$$|MO_1|^2 - |O_1N|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2$$

o bien

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = |O_1N|^2 - |O_2P|^2$$

y puesto que

$$|O_1N|^2 - |O_2P|^2 = R^2 - r^2 = C = \text{const},$$

el problema puede ser formulado de otro modo así.

Ejemplo 16. Hállese el conjunto de los puntos para los cuales la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados O_1 y O_2 es constante.

Resolución con ayuda del método de coordenadas. Orientemos el eje de abscisas por la recta O_1O_2 y elijamos el origen de coordenadas en el punto medio del segmento O_1O_2 (fig. 41).

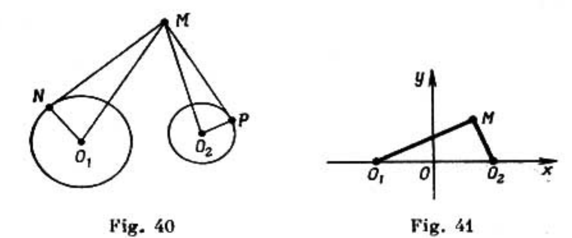


Fig. 40 Fig. 41

Sea $|O_1O_2| = d$; entonces $\left(-\frac{d}{2}; 0\right)$ son las coordenadas del punto O_1 y $\left(\frac{d}{2}; 0\right)$, las coordenadas del punto O_2. Tomemos un punto arbitrario $M(x; y)$ del plano. Según la fórmula de la distancia entre dos puntos (4) del § 1 resulta

$$|MO_1|^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2; \quad |MO_2|^2=\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2;$$

de donde

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2-\left(x-\frac{d}{2}\right)^2-y^2=2xd.$$

Puesto que $|MO_1|^2-|MO_2|^2=C$, para el conjunto de los puntos buscado obtenemos la ecuación de primer grado:

$$2xd = C.$$

Si $d \neq 0$, los puntos buscados pertenecen a la recta $x=\frac{C}{2d}$ paralela al eje de ordenadas o sea, pertenecen a la recta perpendicular a la recta O_1O_2.

Inversamente: tomando los puntos pertenecientes a la recta $x=\frac{C}{2d}$ y cumpliendo todas las transformaciones en el orden inverso, obtenemos que para todo punto de esta recta

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=C.$$

Así pues, hemos obtenido el resultado siguiente. El conjunto de los puntos que tienen constante la diferencia de los cuadrados de

las distancias a dos puntos dados, es la recta perpendicular a la recta que une los puntos dados.

Ahora es fácil responder a la pregunta del ejemplo 15 sobre el conjunto de los puntos, de los cuales se pueden trazar a dos circunferencias las tangentes de igual longitud para todos los casos cuando las circunferencias están situadas recíprocamente.

Resolución. Utilicemos el resultado del ejemplo 16 en el cual hemos demostrado que el conjunto buscado es una recta (posiblemente, sin cierto intervalo). Por eso basta aclarar dónde pasa esta

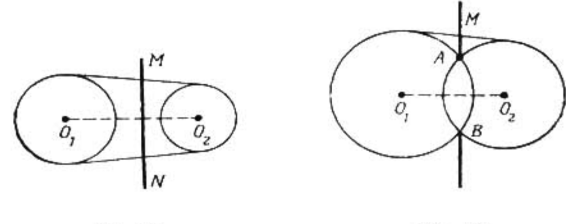


Fig. 42 Fig. 43

recta, por ejemplo hallar dos puntos suyos. Además, hagamos uso del hecho de que los puntos comunes de dos circunferencias satisfacen los datos del problema: de estos puntos se pueden trazar las tangentes cuya longitud es igual a cero. Consideremos los posibles casos de posición recíproca de las circunferencias dadas.

1) Supongamos que las circunferencias dadas están situadas una fuera de la otra (fig. 42). M y N (los puntos medios de sus tangentes exteriores comunes) satisfacen los datos del problema, por eso la recta MN es la buscada. Como corolario (véase el ejemplo 16) de aquí obtenemos que la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias, es perpendicular a la línea de los centros de estas circunferencias.

2) Supongamos que las circunferencias dadas son tangentes exteriormente (fig. 43). Razonando de un modo análogo, nótese que el punto medio M de la tangente exterior común y el punto N de tangencia de las circunferencias satisfacen los datos del problema (en vez del punto N se puede tomar el punto medio de la segunda tangente exterior común, que en la fig. 43 está representada por la línea de trazos), por eso la recta MN es el conjunto buscado. (Simultáneamente hemos obtenido que la recta que pasa por el punto medio de la tangente exterior común de dos circunferencias perpendicularmente a su línea de los centros, pasa también por el punto común de estas circunferencias.)

3) Si las circunferencias se intersecan (fig. 44), entonces, puesto que los puntos M y A satisfacen las condiciones del problema, la recta buscada es MA sin el intervalo AB (de los puntos de este intervalo no se pueden trazar las tangentes a las circunferencias). Además, de este modo queda demostrado que los puntos M, A y B se encuentran sobre la misma recta, que es perpendicular a la línea de los centros.

4) Supongamos ahora que las circunferencias son tangentes interiormente (fig. 45). La recta buscada es la tangente común ya que ésta pasa por el punto N, que satisface los datos del problema, y es

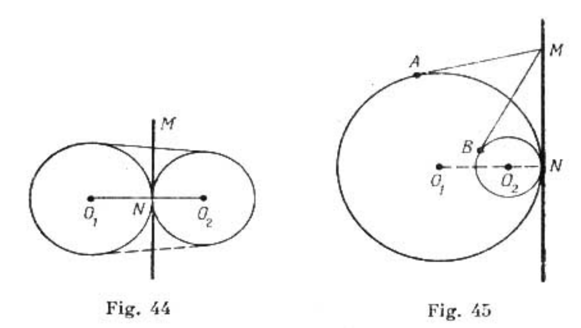


Fig. 44 Fig. 45

perpendicular a la línea de los centros (fig. 45). Esto es fácil demostrar también de un modo distinto: para todo punto de esta recta $|MA| = |MN| = |MB|$, donde A y B son los puntos de tangencia.

5) Ahora consideremos el caso cuando una circunferencia está dentro de la otra y sus centros O_1 y O_2 no coinciden (fig. 46).

Reduzcamos este caso al caso 3). Para esto tracemos la circunferencia con el centro O_3, no perteneciente a la recta O_1O_2 y que corta a las dos circunferencias dadas. Consideremos las rectas sobre las cuales están las cuerdas comunes de las circunferencias que tienen por centros O_1 y O_3, O_2 y O_3. Sea M el punto de intersección de estas rectas. Según lo demostrado en el caso 3)

$$|MO_1|^2 - |MO_3|^2 = R_1^2 - R_3^2; \quad |MO_2|^2 - |MO_3|^2 = R_2^2 - R_3^2,$$

de donde

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

o sea, el punto M pertenece al conjunto buscado, por eso todo el conjunto buscado es una recta que pasa por el punto M perpendicularmente a la recta O_1O_2.

6) Si las circunferencias son concéntricas, el conjunto buscado es vacío. En efecto, el conjunto de los puntos de los cuales se puede trazar a la primera circunferencia tangentes de longitud dada, es una *circunferencia concéntrica a la dada; para la segunda circunferencia* es también una circunferencia concéntrica, pero de otro radio (fig. 47). Estos conjuntos no tienen puntos comunes.

Observación. La recta $x = (R^2 - r^2)/(2d)$ se llama *eje radical* de dos circunferencias dadas. De cada punto suyo que sea exterior

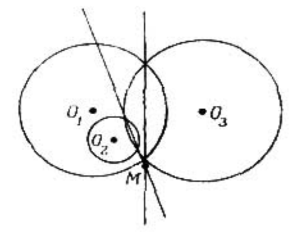


Fig. 46

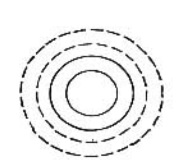


Fig. 47

respecto a dos circunferencias dadas, se puede trazar a éstas tangentes iguales. ●

Ahora se puede resolver sin dificultad el siguiente problema (cuya resolución puramente geométrica también es bastante difícil)

○ **Ejemplo 17.** *Se dan tres circunferencias cada una de las cuales corta a otras dos. Demuéstrese que las rectas a las cuales pertenecen sus cuerdas comunes se intersecan en el mismo punto.*

Resolución. El problema se resuelve de un modo análogo al caso 5) del ejemplo 16 (fig. 48). El punto M de intersección de las cuerdas comunes de las circunferencias, que tienen por centros O_1 y O_2 y O_2 y O_3, posee una propiedad que consiste en que la diferencia de los cuadrados de las distancias comprendidas entre este punto y los puntos O_1 y O_2 (O_2 y O_3) es constante, a saber

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$
$$|MO_2|^2 - |MO_3|^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

Sumando término a término estas igualdades, resulta

$$|MO_1|^2 - |MO_3|^2 = R_1^2 - R_3^2,$$

o sea, el punto M debe encontrarse sobre la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias con los centros O_1 y O_3 y pertenecer a la cuerda común de estas circunferencias. Por consiguiente, el punto M está en la intersección de tres rectas a las cuales pertenecen sus cuerdas comunes.

Ejemplo 18. Hállese el conjunto de los puntos la suma de los cuadrados de las distancias de los cuales a los vértices A y B del triángulo ABC es igual al cuadrado de la distancia a su tercer vértice: el punto C.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 49; el vértice A tiene las coordenadas $(-1; 0)$ y el vértice B, las coordenadas $(1; 0)$. Supongamos que el vértice C tiene las coordenadas $(a; b)$ y sea $M(x; y)$ el punto arbitrario del

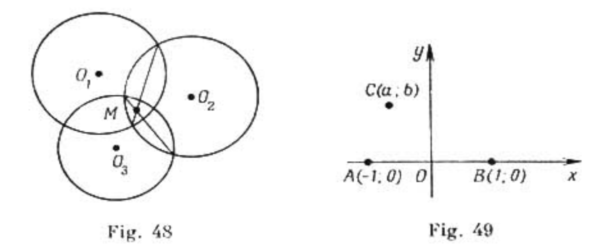


Fig. 48 Fig. 49

conjunto buscado. Entonces los datos del problema pueden escribirse así:

$$|MA|^2 + |MB|^2 = |MC|^2.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos

$$[(x+1)^2 + y^2] + [(x-1)^2 + y^2] = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, se puede transformar la última ecuación así:

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 2(a^2 + b^2 - 1). \qquad (12)$$

Ahora se ve que si $a^2 + b^2 - 1 > 0$, el conjunto buscado es la circunferencia que tiene por centro el punto $D(-a; -b)$ y por radio $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2}$; si $a^2 + b^2 = 1$, el conjunto buscado se compone de un solo punto $D(-a; -b)$; si $a^2 + b^2 - 1 < 0$, el conjunto buscado es vacío.

Nótese que el punto D es simétrico al vértice C respecto al origen de coordenadas O (fig. 50). De aquí se deduce que el centro D de la circunferencia hallada es el vértice del paralelogramo $ACBD$, opuesto al vértice C.

Aclaremos ahora el significado de las condiciones, para las cuales están obtenidas distintas respuestas a la pregunta del problema. Es sabido que $a^2 + b^2 = 1$ es la ecuación de la circunferencia de radio unitario con el centro en el origen de coordenadas, y las desigualdades $a^2 + b^2 > 1$ y $a^2 + b^2 < 1$ representan respectivamente, la región

exterior y el interior del círculo unitario acotado por esta circunferencia.

De aquí se desprende que el conjunto buscado de los puntos es la circunferencia, el punto o el conjunto vacío y esto depende si está o no el vértice C fuera del círculo unitario con el centro en el origen de coordenadas, en la circunferencia que lo limita (desde luego, sin los puntos A y B) o dentro de este círculo, respectivamente.

Si el vértice C está situado en la circunferencia indicada, el ángulo $ACB = 90°$, como ángulo inscrito que se apoya en el diámetro. Por eso la investigación de las condiciones para las cuales

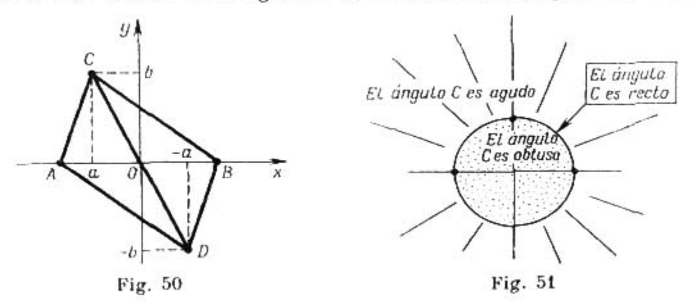


Fig. 50 Fig. 51

se obtienen distintas respuestas consiste en aclarar si es agudo, recto u obtuso el ángulo C en el triángulo ABC (fig. 51).

Por último, nótese que

$$2(a^2 + b^2 - 1) = [(a-1)^2 + b^2] + [(a+1)^2 + b^2] - 4$$

(para cerciorarse de esto es necesario suprimir los paréntesis en el segundo miembro de la última igualdad y reducir los términos semejantes). Pero

$$(a-1)^2 + b^2 = |BC|^2; \quad (a+1)^2 + b^2 = |AC|^2;$$
$$4 = |AB|^2,$$

por eso el radio de la circunferencia (12) es igual a

$$\sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}.$$

Ahora bien, si el ángulo del vértice C es agudo, el conjunto buscado representa la circunferencia de radio $\sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}$ que tiene por centro el vértice D del paralelogramo $ACBD$;

si el ángulo del vértice C es recto, el conjunto buscado es el vértice D del paralelogramo $ACBD$;

si el ángulo del vértice C es obtuso, el conjunto buscado es vacío

Observación. De paso queda determinado que si a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo, entonces:

la condición $a^2 + b^2 > c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es agudo;

la condición $a^2 + b^2 = c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es recto;

la condición $a^2 + b^2 < c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es obtuso. ●

Los últimos problemas son los casos particulares del siguiente teorema general que puede ser demostrado también con ayuda del método de coordenadas.

Teorema de los cuadrados de las distancias. *Si se dan los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en un plano y los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$, entonces el conjunto de los puntos M para los cuales se cumple la condición*

$$\lambda_1 \mid MA_1 \mid^2 + \lambda_2 \mid MA_2 \mid^2 + \ldots + \lambda_n \mid MA_n \mid^2 = \mu,$$

es la circunferencia, o la recta, o un solo punto, o todo el plano, o bien el conjunto vacío. [1])

Consideremos cómo con ayuda del método de coordenadas se puede resolver el siguiente problema presentado en los exámenes de ingreso de 1970 (Universidad de Moscú, facultad de química).

○ **Ejemplo 19.** En el triángulo ABC se conoce que el ángulo $ACB = 60°$ y el radio de la circunferencia circunscrita es igual a $2\sqrt{3}$. En el lado AB se toma un punto D de modo que $\mid AD \mid = 2 \mid DB \mid$ y además, $\mid CD \mid = 2\sqrt{2}$. Hállese el área S_{ABC}.

Resolución. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita. Introduzcamos el sistema de coordenadas que tiene por origen el punto E (punto medio del segmento AB) y orientemos los ejes de coordenadas según se muestra en la fig. 52. Calculemos las longitudes de los segmentos siguientes:

$$\mid AB \mid = R\sqrt{3} = 6; \quad \mid DE \mid = \frac{1}{6} \mid AB \mid = 1; \quad \mid OE \mid = \frac{R}{2} = \sqrt{3}.$$

En el sistema de coordenadas elegido el punto C tiene las coordenadas (x, y) y las coordenadas de los puntos O y D son iguales a $(0; \sqrt{3})$ y $(1; 0)$, respectivamente.

Para calcular el área del triángulo ABC es necesario hallar su altura, o sea, la ordenada del punto C. Puesto que el punto C pertenece a la circunferencia circunscrita, sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2.$$

---

[1]) **Véase el** § 2 del libro: *N. B. Vasíliev, V. L. Gutenmajer.* Rectas y **curvas.** M., 1978, *en ruso.*

Para encontrar la ordenada del punto C planteemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+(y-\sqrt{3})^2=12, \\ (x-1)^2+y^2=8. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $y=\sqrt{2}$ (el valor $y=-\sqrt{2}$ que también satisface el sistema no conviene, ya que en este caso $\widehat{AC_1B}=120°$, lo que no corresponde a los datos del problema).

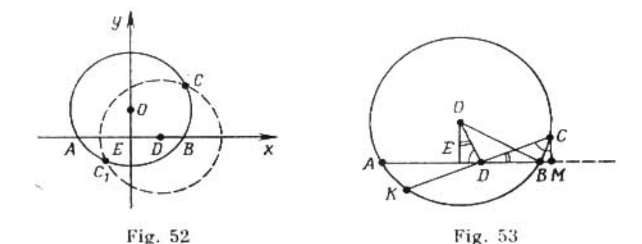


Fig. 52 Fig. 53

Así pues, la altura del triángulo ABC es igual a $\sqrt{2}$, por lo tanto,

$$S_{ABC}=6\sqrt{2}/2=3\sqrt{2}.$$

Demos ahora, para comparar, la resolución geométrica de este problema (fig. 53). Al igual que en la primera resolución, primero encontramos que $|AB|=6$; entonces $|AD|=4$, $|BD|=2$ (E es el punto medio de la cuerda AB). Según el teorema de las cuerdas que se intersecan dentro del círculo

$$|AD|\,|DB|=|DC|\,|KD|,$$

de donde

$$|KD|=\frac{|AD|\,|DB|}{|DC|}=2\sqrt{2}=|CD|,$$

o sea, D es el punto medio de la cuerda KC. De aquí obtenemos inmediatamente que

$$[OD]\perp[KC]\ ^{1)}. \tag{13}$$

Sea CM la altura del triángulo ABC, entonces $\widehat{CDM}=\widehat{EOD}$ (de (13) y del hecho de que $[OE]\perp[AB]$ resulta que los ángulos en cuestión tienen lados perpendiculares, respectivamente). Pero es fácil hallar

---

[1]) La designación $[OD]$ simboliza el segmento de la recta con los extremos O y D.

el ángulo EOD:

$$\widehat{EOB}=60°;\quad \frac{|ED|}{|BD|}=\frac{1}{2}=\frac{|OE|}{|OB|},$$

por eso OD es la bisectriz del ángulo EOB, por lo tanto,

$$\widehat{EOD}=30°=\widehat{CDM},$$

de donde se deduce que $|CM|=(1/2)\,|CD|=\sqrt{2}$ y el problema queda resuelto. ●

Los ejemplos citados muestran que la aplicación del método de coordenadas resulta muy útil para resolver los problemas geométricos.

Sus ventajas son evidentes sobre todo en los casos cuando la resolución del problema por métodos puramente geométricos resulta complicada o necesita aplicar teoremas poco conocidos; el método de coordenadas permite obtener la solución del problema en la forma general, mientras que la resolución geométrica requiere considerar casos particulares por separado (así, en el ejemplo 19 resulta muy difícil la solución puramente geométrica para otros datos numéricos).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué es tangente del ángulo de inclinación de una recta al eje Ox?
2. Dedúzcase la ecuación de la recta con coeficiente angular.
3. Dedúzcase la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.
4. ¿Qué es la ecuación «segmentaria» de la recta?
5. Enúnciese las condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas.
6. ¿Cómo se determina la distancia de un punto a la recta?
7. Demuéstrese que la ecuación de la recta siempre se expresa por la ecuación de primer grado e, inversamente, toda ecuación de primer grado es la ecuación de la recta.
8. ¿En qué consiste el significado geométrico de los parámetros k y b en la ecuación de la recta con coeficiente angular?
9. Investíguese la ecuación general de la recta $Ax+By+C=0$ para $A=0$, para $B=0$ y para $C=0$.
10. ¿Cómo se expresan las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes Ox y Oy, así como las ecuaciones de los mismos ejes de coordenadas?
11. ¿Cómo reducir la ecuación de la recta con coeficiente angular a la ecuación general de la recta?
12. ¿Cómo se puede hallar el punto de intersección de dos rectas?

§ 4. Líneas de segundo orden

Consideremos tres tipos de líneas: la elipse, la hipérbola y la parábola, cuyas ecuaciones en el sistema rectangular de coordenadas son las ecuaciones de segundo grado. Estas líneas se llaman *líneas de segundo orden*.

1. La elipse.

Definición. *Se llama elipse al conjunto de todos los puntos de un plano para los cuales la suma de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es un valor constante, mayor que la distancia entre los focos.*

Para deducir la ecuación de la elipse introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas, de modo que los focos de la elipse estén sobre el eje de abscisas y el origen de coordenadas divida en dos partes iguales la distancia entre los focos. Deduzcamos la ecuación de la elipse en el sistema de coordenadas elegido.

Designemos los focos de la elipse por F_1 y F_2 (fig. 54). Sea M un punto arbitrario de la elipse. Designemos por $2c$ la distancia $|F_1F_2|$ entre los focos y por $2a$ la suma de las distancias que median del punto M a los focos. Puesto que, por definición,

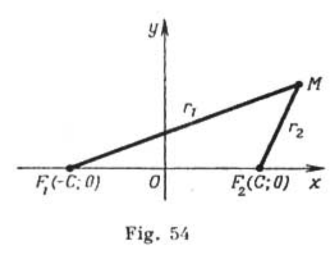


Fig. 54

$$|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|,$$

$2a > 2c$ o bien $a > c$.

Designemos, luego, por r_1 y r_2 la distancia que media del punto M a los focos ($r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$). Los números r_1 y r_2 se denominan *radios focales* del punto M. De la definición se desprende que el punto M $(x; y)$ se encuentra sobre la elipse dada si, y sólo si,

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Para obtener la ecuación buscada de la elipse es necesario reemplazar en la igualdad (1) las variables r_1 y r_2 por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. Puesto que F_1 y F_2 están situados en el eje Ox simétricamente respecto al origen de coordenadas, ellos tienen las coordenadas $(-c; 0)$ y $(c; 0)$, respectivamente; tomando esto en consideración y aplicando la fórmula (4) del § 1, encontramos

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (1), resulta

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$

La ecuación (3) es precisamente la ecuación de la elipse buscada. Sin embargo, para el uso práctico esta forma es incómoda, por eso la ecuación de la elipse suele reducirse a una forma más simple. Para esto traslademos la segunda raíz de la ecuación (3) al segundo miembro de la ecuación y luego elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad. Obtenemos

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

o bien

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \qquad (4)$$

Otra vez elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

De aquí

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2). \qquad (5)$$

Introduzcamos en el examen una nueva magnitud

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \qquad (6)$$

cuyo significado se aclarará a continuación. Puesto que, según los datos, $a>c$, entonces $a^2-c^2>0$ y, por consiguiente, b es un número positivo. De la igualdad (6) resulta

$$b^2=a^2-c^2,$$

por eso la ecuación (5) se puede escribir en la forma

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Dividiendo ambos miembros por a^2b^2, obtenemos finalmente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7)$$

Puesto que la ecuación (7) fue obtenida de la ecuación (3), las coordenadas de todo punto de la elipse que satisfacen la ecuación (3) satisfarán también la ecuación (7). No obstante, durante la simplificación de la ecuación (3) ambos miembros suyos han sido elevados dos veces al cuadrado y pudieron aparecer raíces «superfluas» y la ecuación (7) pudo resultar no equivalente a la (3). Vamos a cerciorarnos de que si las coordenadas del punto satisfacen la ecuación (7), ellas satisfacen también la (3), o sea, las ecuaciones (3) y (7) son equivalentes. Para esto, evidentemente, basta mostrar que las magnitudes r_1 y r_2 para todo punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (7), satisfacen la relación (1). Efectivamente, supongamos que las coordenadas x e y de cierto punto satisfacen la ecuación (7). Entonces, sustituyendo en la expresión (2) para r_1 el valor $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, obtenido de (7), después de transformaciones poco complicadas hallaremos $r_1=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}$. Puesto que $|x|\leqslant a$ [esto se deduce de (7)] y $\frac{c}{a}<1$, entonces $a+\frac{c}{a}x>0$ y por eso $r_1=a+\frac{c}{a}x$.

De un modo análogo encontramos que $r_2 = a - \frac{c}{a} x$. Sumando término a término estas igualdades, obtenemos la relación (1), que es lo que se quería demostrar. Así pues, todo punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (7) pertenece a la elipse y, viceversa, (7) es la ecuación de la elipse. La ecuación (7) se llama *ecuación canónica* (o *elemental*) de la elipse. De esta manera, la elipse es una línea de segundo orden.

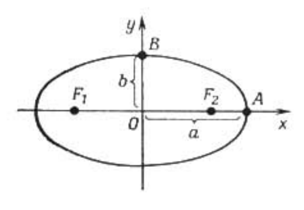


Fig. 55

Vamos a investigar ahora la forma de la elipse según su ecuación canónica (7). Nótese que la ecuación (7) contiene términos sólo con potencias pares de las coordenadas x e y, por eso la elipse es simétrica respecto a los ejes Ox y Oy, así como respecto al origen de coordenadas. En virtud de lo dicho la forma de toda la elipse será conocida si se determina la forma de aquella parte suya que está en el cuadrante I. Para esto resolvamos la ecuación (7) respecto a y: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ y teniendo en cuenta que en el primer cuadrante $y \geqslant 0$, consideremos la ecuación

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{8}$$

De la igualdad (8) se desprenden las afirmaciones siguientes:

1) si $x = 0$, entonces $y = b$. Por lo tanto, el punto $(0; b)$ está sobre la elipse. Designémoslo con B;

2) al crecer x de 0 a a, y disminuye;

3) si $x = a$, entonces $y = 0$. Por consiguiente, el punto $(a; 0)$ está sobre la elipse. Designémoslo con A;

4) para $x > a$ obtenemos los valores imaginarios de y. Por lo tanto, no existen los puntos de la elipse en los cuales $x > a$.

Así pues, la parte de la elipse situada en el cuadrante I es el arco BA [1]).

Reflejando este arco simétricamente respecto a ambos ejes de coordenadas obtenemos toda la elipse (fig. 55).

Observación. Si $a = b$, la ecuación (7) toma la forma $x^2 + y^2 = a^2$. Ésta es la ecuación de la circunferencia de radio a. De esta forma, la circunferencia es un caso particular de la elipse. Notemos que la elipse puede ser obtenida de la circunferencia de radio a si

[1]) En el cap. V será introducido el concepto de sentido de la convexidad del gráfico de la función $y = f(x)$ y demostrado que el arco BA está orientado con la convexidad hacia arriba.

ésta se contrae $\frac{a}{b}$ veces a lo largo del eje Oy. Con tal contracción el punto $(x; y)$ pasará al punto $(x; y_1)$, donde $y_1 = y\frac{b}{a}$. Sustituyendo $y = y_1\frac{a}{b}$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Los ejes de simetría de la elipse se llaman *ejes* de la misma y el centro de simetría (el punto de intersección de los ejes), *centro* de la elipse. Los puntos en los cuales la elipse corta los ejes se denominan *vértices* de la misma. Puesto que en virtud de la igualdad (6) $a \geqslant b$, entonces $2a$ es la longitud del eje mayor de simetría de la elipse y $2b$, la longitud del eje menor. Por consiguiente, los números a y b son las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente.

Introduzcamos una magnitud más que caracteriza la forma de la elipse.

Definición. *Se llama excentricidad de la elipse la razón* $\frac{c}{a}$, *donde* c *es la mitad de la distancia entre los focos y* a, *el semieje mayor de la elipse.*

La excentricidad suele designarse con letra ε: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Puesto que $c < a$, entonces $0 \leqslant \varepsilon < 1$, o sea, la excentricidad de la elipse es menor que la unidad. Tomando en consideración que $c^2 = a^2 - b^2$, encontraremos

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

De la última igualdad se puede obtener fácilmente la interpretación geométrica de la elipse. Para una ε muy pequeña, los números a y b son casi iguales, o sea, la elipse se asemeja a la circunferencia. En cambio, si ε es próxima a la unidad, el número b es pequeño en comparación con el número a y la elipse está muy alargada a lo largo del eje mayor. Así que, la excentricidad de la elipse caracteriza la medida de alargamiento de la elipse.

Como es sabido, los planetas y ciertos cometas se mueven por órbitas elípticas. Resulta que las excentricidades de las órbitas planetarias son muy pequeñas y de las de cometas son grandes, o sea son próximas a la unidad. Así pues, los planetas se mueven casi por la circunferencia, mientras que los cometas ora se acercan al Sol (el Sol se encuentra en uno de los focos), ora se alejan de éste.

○ **Ejemplo 1.** Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por los puntos M_1 (2; 3) y M_2 $(1;\ 3\sqrt{5/2})$.

Resolución. Supongamos que la ecuación buscada de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A esta ecuación se satisface por las coordenadas de los puntos dados. Sustituyendo en vez de x e y primero las coordenadas del punto M_1 y luego las coordenadas del punto M_2, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1; \qquad \frac{1}{a^2}+\frac{45}{4b^2}=1.$$

Designando $\frac{1}{a^2}=m$; $\frac{1}{b^2}=n$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} 4m+9n=1, \\ m+\frac{45}{4n}=1, \end{cases}$$

con el que hallamos, al resolverlo, $m=1/16$, $n=1/12$, de donde $a^2=16$, $b^2=12$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1. \quad ●$$

Ejercicio. Muestre que la ecuación $3x^2+16y^2=192$ define una elipse. Hállense sus semiejes, focos y excentricidad. $\Big($*Resp.* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1$; $a=8$; $b=2\sqrt{3}$; $F_1(2\sqrt{13};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{13};\ 0)$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{4}\Big)$.

2. La hipérbola.

Definición. *Se llama hipérbola al conjunto de todos los puntos del plano para los cuales el módulo de la diferencia de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es un valor constante, menor que la distancia entre los focos.*

Para deducir la ecuación de la hipérbola introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas de modo que los focos estén sobre el eje de abscisas y el origen de coordenadas divida en dos partes iguales la distancia entre los focos. Deduzcamos la ecuación de la hipérbola en el sistema elegido de coordenadas.

Designemos con F_1 y F_2 (fig. 56) los focos de la hipérbola. Sea M un punto arbitrario de la misma. Designemos con $2c$ la distancia $|F_1F_2|$ entre los focos y con $2a$ el módulo de la diferencia de las distancias del punto M a los focos. Puesto que, por definición, $||F_1M|-|F_2M||<|F_1F_2|$, entonces $2a<2c$ o bien $a<c$.

Los números $|F_1M|$ y $|F_2M|$ se llaman *radios focales* del punto M y se designan por r_1 y r_2. De la definición se deduce que el punto M $(x;\ y)$ está sobre la hipérbola dada si, y sólo si, $|r_1 - r_2| = 2a$. De aquí

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \tag{9}$$

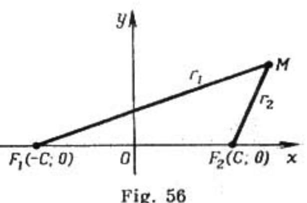


Fig. 56

Por analogía con la elipse, para obtener la ecuación buscada de la hipérbola es necesario en la igualdad (9) reemplazar las variables r_1 y r_2 por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. Puesto que los focos F_1 y F_2 se encuentran sobre el eje Ox simétricamente respecto al origen de coordenadas, ellos tienen las coordenadas $(-c;\ 0)$ y $(c;\ 0)$. Según la fórmula (4) del § 1 resulta

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{10}$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (9), se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{11}$$

La ecuación (11) es la *ecuación de la hipérbola* buscada. Simplifiquemos esta ecuación al igual que la ecuación (3) para la elipse. Traslademos la segunda raíz al segundo miembro de la ecuación y luego elevemos al cuadrado ambos miembros. Resulta

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

o bien

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{12}$$

Elevemos una vez más al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

De aquí

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2). \tag{13}$$

Vamos a considerar una nueva magnitud:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{14}$$

cuyo significado geométrico se aclarará posteriormente. Puesto que $c > a$, entonces $c^2 - a^2 > 0$ y b es un número positivo. De la igualdad (14) tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

La ecuación (13) toma la forma

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

o bien

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{15}$$

Ésta es precisamente la *ecuación canónica de la **hipérbola.***

Al igual que para la elipse, se puede demostrar la equivalencia de las ecuaciones (15) y (11) (hágase esto en forma independiente).

Investiguemos la fórmula de la hipérbola según la ecuación (15). Puesto que la ecuación (15) contiene sólo los términos con potencias pares de las coordenadas corrientes x e y, por analogía con la elipse basta examinar únicamente la parte de la hipérbola que se encuentra en el cuadrante I. Despejemos en la ecuación (15) y, suponiendo $y \geqslant 0$. Obtenemos

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{16}$$

De la igualdad (16) se desprenden las afirmaciones siguientes:

1) si $0 \leqslant x < a$, entonces y tiene valores imaginarios, o sea, los puntos de la hipérbola con las abscisas $0 \leqslant x < a$ no existen;

2) si $x = a$, entonces $y = 0$, o sea, el punto $(a;\ 0)$ pertenece a la hipérbola. Designémoslo con A;

3) si $x > a$, entonces $y > 0$. Al crecer x crece también y e $y \to +\infty$ para $x \to +\infty$. El punto variable $M\ (x;\ y)$ se traslada en la hipérbola, con el crecimiento de x, «a la derecha» y «hacia arriba», con la particularidad de que su posición inicial es el punto $A\ (a;\ 0)$ (fig. 57). Aquí es necesario precisar cómo el punto M «se va al infinito». Para esto, además de la ecuación (16), consideremos la ecuación

$$y = \frac{b}{a}x, \tag{17}$$

que, como ya se sabe, define la recta con el coeficiente angular $k = \frac{b}{a}$ la cual pasa por el origen de coordenadas. La parte de esta recta, situada en el cuadrante I, se muestra en la fig. 57. Para construirla se puede utilizar el triángulo rectángulo OAB con los catetos $|OA| = a$ y $|AB| = b$.

Mostremos que el punto M, moviéndose por la hipérbola al infinito, se aproxima indefinidamente a la recta (17) que es *asíntota de la **hipérbola***[1]).

---

[1]) En el cap. V, § 15 se da la definición de la asíntota de una gráfica de la función $y = f(x)$ y se muestra que la recta $y = \frac{b}{a}x$ es la asíntota de la hipérbola, y en el subp. 4 se considera la cuestión sobre el sentido de la convexidad de la hipérbola.

Tomemos un valor arbitrario de $x (x \geqslant a)$ y consideremos dos puntos $M (x, y)$ y $N (x, Y)$, donde $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $Y = \frac{b}{a}x$. El punto M está situado en la hipérbola y el punto N, sobre la recta (17). Puesto que ambos puntos tienen la misma abscisa x, la recta

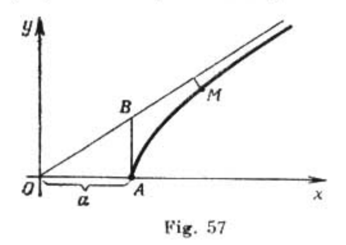


Fig. 57

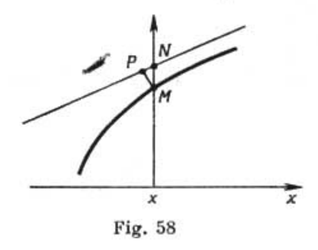


Fig. 58

que une los puntos M y N es perpendicular al eje Ox (fig. 58). Hallemos la longitud del segmento MN.

Ante todo obsérvese que para $x \geqslant a$

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Esto quiere decir que para la misma abscisa el punto de la hipérbola está debajo del punto correspondiente de la asíntota. Por lo tanto,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

De la expresión obtenida se deduce que para $x \to +\infty$ la fracción tiende a cero ya que el denominador crece mientras que el numerador es una magnitud constante ab. Por consiguiente, $|MN| = Y - y$ tiende a cero para $x \to +\infty$.

Designemos con P el pie de la perpendicular trazada del punto M a la recta (17); MP es la distancia que media del punto M a esta recta. Es evidente que $|MP| < |MN|$ y ya que $|MN| \to 0$, entonces con mayor razón $|MP| \to 0$ cuando $x \to +\infty$, o sea, el punto M se aproxima indefinidamente a la recta (17). Y precisamente esto es lo que queríamos mostrar. Un razonamiento análogo se puede llevar a cabo para todo cuadrante.

Así pues, la rama de la hipérbola en cuestión, situada en el cuadrante I, pasa por el punto A $(a; 0)$ y está dirigida «a la derecha» y «hacia arriba», acercándose asintóticamente a la recta $y = \frac{b}{a}x$ (véase la fig. 57).

Ahora es fácil determinar la forma de toda la hipérbola con ayuda de la simetría respecto a los ejes de coordenadas (fig. 59). La hipérbola se compone de dos ramas (derecha e izquierda) y tiene dos asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ la primera de las cuales ya está considerada y la segunda es su reflejo simétrico respecto al eje Ox (o respecto al eje Oy).

Los ejes de simetría se llaman *ejes de la hipérbola* y el centro de la simetría (el punto de intersección de los ejes), *centro de la hipérbola*.

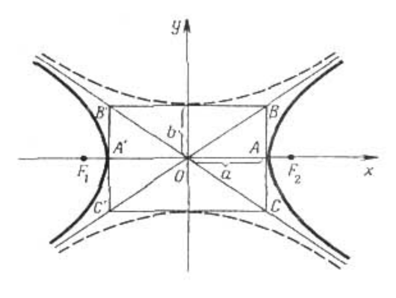


Fig. 59

Uno de los ejes se interseca con la hipérbola en dos puntos que se llaman *vértices* de la misma (en la fig. 59 se designan con letras A' y A). Este eje se denomina *eje real* de la hipérbola. El otro eje no tiene puntos comunes con la hipérbola y se denomina *eje imaginario* de la hipérbola. El rectángulo $BB'C'C$ con los lados $2a$ y $2b$ (fig. 59) se dice *rectángulo básico* de la hipérbola. Las magnitudes a y b se llaman *semiejes real* e *imaginario* de la hipérbola, respectivamente.

Permutando las letras x e y, a y b, la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

puede reducirse a la ecuación (15). De aquí está claro que ella define la hipérbola situada así como se muestra en la fig. 59 con líneas de trazos; sus vértices se encuentran sobre el eje Oy. Esta hipérbola se llama *conjugada* respecto a la hipérbola (15). Ambas hipérbolas tienen las mismas asíntotas.

La hipérbola con semiejes iguales ($a = b$) se denomina *equilátera* y su ecuación canónica tiene la forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Puesto que el rectángulo básico de una hipérbola equilátera es un cuadrado, las asíntotas de la misma son recíprocamente perpendiculares.

Definición. *Se llama excentricidad de la hipérbola a la razón* $\frac{c}{a}$, *donde c es la mitad de la distancia entre los focos y a, el semieje real de la hipérbola.*

La excentricidad de la hipérbola (al igual que la de la elipse) se designa con letra ε. Puesto que $c > a$, entonces $\varepsilon > 1$, o sea, la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad. Tomando en consideración que $c^2 = a^2 + b^2$, resulta

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

De la última igualdad es fácil obtener la interpretación geométrica de la excentricidad de la hipérbola. Cuanto menor sea la excentricidad, es decir, cuanto más próxima sea ella a la unidad, tanto menor será la razón $\frac{b}{a}$ y esto quiere decir que el rectángulo básico quedará más alargado en la dirección del eje real. De esta manera, la excentricidad de la hipérbola caracteriza la forma de su rectángulo básico y, por lo tanto, también la forma de la misma hipérbola.

Para la hipérbola equilátera ($a = b$) resulta $\varepsilon = \sqrt{2}$.

○ **Ejemplo 2.** Se da la ecuación de la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$. Hállese sus semiejes real e imaginario; escríbase la ecuación de las asíntotas de la hipérbola.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$\frac{3x^2}{12} - \frac{4y^2}{12} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

de donde encontramos que el semieje real $a=2$ y el semieje imaginario $b=\sqrt{3}$. Puesto que las asíntotas de la hipérbola tienen las ecuaciones $y=\pm\frac{b}{a}x$, los focos tienen las coordenadas $(-c; 0)$ y $(c; 0)$; la excentricidad $\varepsilon=\frac{c}{a}$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$, entonces para la hipérbola dada obtenemos las coordenadas de los focos $(-\sqrt{7}; 0)$ y $(\sqrt{7}; 0)$, la excentricidad $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{a}$ y la ecuación de las asíntotas $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x$. ●

Ejercicio. Escríbase la ecuación de la hipérbola si se conoce que la distancia entre sus vértices es igual a 16 y sus focos se encuentran en los puntos $(-10; 0)$ y $(10; 0)$. $\left(Resp.\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.\right)$

En el subpárrafo siguiente consideraremos una propiedad importante de la elipse y la hipérbola.

3. Directrices de la elipse y la hipérbola.

Definición 1. *Dos rectas perpendiculares al eje mayor de la elipse, situadas simétricamente respecto al centro y que distan* $\frac{a}{\varepsilon}$ *de éste, se llaman directrices de la elipse (aquí* a *es el semieje mayor y* ε, *la excentricidad de la elipse).*

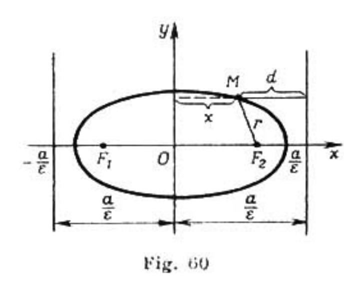


Fig. 60

La ecuación de las directrices de una elipse definida por la ecuación (7) tiene la forma

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Puesto que para la elipse $\varepsilon < 1$, entonces $\frac{a}{\varepsilon} > a$. De aquí, se desprende que la directriz derecha está situada a la derecha del vértice derecho de la elipse y la izquierda, a la izquierda de su vértice izquierdo (fig. 60).

Definición 2. *Dos rectas perpendiculares al eje real de la hipérbola y situadas simétricamente respecto a su centro, a la distancia* $\frac{a}{\varepsilon}$ *de éste, se llaman directrices de la hipérbola (aquí* a *es el semieje real y* ε, *la excentricidad de la hipérbola).*

La ecuación de las directrices de la hipérbola definida por la ecuación canónica (15) tiene la forma

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Puesto que para la hipérbola $\varepsilon > 1$, entonces $\frac{a}{\varepsilon} < a$. De donde se deduce que la directriz derecha está situada entre el centro y el vértice derecho de la hipérbola, y la izquierda, entre el centro y el vértice izquierdo (fig. 61).

Con ayuda de los conceptos de directriz y excentricidad se puede enunciar la propiedad común inherente a la elipse y la hipérbola. Tienen lugar los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.8. *Si* r *es la distancia de un punto arbitrario* M *de la elipse a cualquier foco y* d *es la distancia del mismo punto a la directriz*

correspondiente a este foco, la razón $\frac{r}{d}$ *es una magnitud constante, igual a la excentricidad de la elipse.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho F_2 y de la directriz derecha. Sea $M(x; y)$ un punto arbitrario de la elipse (véase la fig. 60). La distancia entre el

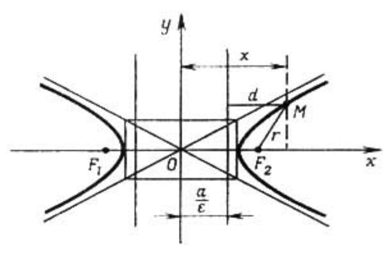


Fig. 61

punto M y la directriz derecha se define por la igualdad

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x \tag{18}$$

la cual se determina fácilmente de la figura. De las igualdades (2) y (4) resulta

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Suponiendo $c/a = \varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia que media del punto M al foco derecho;

$$r = a - \varepsilon x. \tag{19}$$

De las relaciones (18) y (19) resulta

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\,\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.9. *Si r es la distancia de un punto arbitrario M de la hipérbola a cualquier foco y d es la distancia que media del mismo punto a la directriz correspondiente a este foco, la razón* $\frac{r}{d}$ *es una magnitud constante, igual a la excentricidad de la hipérbola.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho F_2 y de la directriz derecha. Sea $M(x, y)$ un punto arbitrario de la hipérbola (fig. 61). Consideremos dos casos.

1) El punto M se encuentra sobre la rama derecha de la hipérbola. Entonces la distancia entre el punto M y la directriz derecha

se define por la igualdad

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon} \tag{20}$$

la cual se determina fácilmente de la figura. De las igualdades (10) y (12) resulta

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} x - a.$$

Suponiendo $c/a = \varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia desde el punto M al foco derecho:

$$r = \varepsilon x - a. \tag{21}$$

De las relaciones (20) y (21) resulta

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - a/\varepsilon} = \frac{(\varepsilon x - a)}{\varepsilon x - a} = \varepsilon.$$

2) El punto M se encuentra sobre la rama izquierda de la hipérbola. Entonces la distancia entre el punto M y la directriz derecha se define por la igualdad

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}. \tag{22}$$

De las igualdades (10) y (12) resulta

$$r = r_1 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -\left(\frac{c}{a} x - a\right).$$

Suponiendo $c/a = \varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia desde el punto M al foco derecho:

$$r = -(\varepsilon x - a). \tag{23}$$

De las relaciones (22) y (23) resulta

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\,\varepsilon}{(-\varepsilon x + a)} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

La propiedad determinada de la elipse y la hipérbola se puede poner como base de la definición común de estas líneas: *el conjunto de los puntos para los cuales la razón de sus distancias al foco y a la directriz correspondiente es una magnitud constante*, *igual a* ε, *es una elipse*, *si* $\varepsilon < 1$ *y una hipérbola*, *si* $\varepsilon > 1$.

Surge la pregunta: ¿qué es el conjunto de los puntos definido de un modo análogo a condición de que $\varepsilon = 1$? Resulta que es una nueva línea de segundo orden llamada parábola.

4. La parábola.

Definición. *Se llama parábola al conjunto de todos los puntos del plano cada uno de los cuales equidista de un punto dado*, *llamado foco*, *y de una recta dada que se llama directriz y no pasa por el foco.*

Para deducir la ecuación de la parábola introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas de un modo tal, que el eje de abscisas pase por el foco perpendicularmente a la directriz y consideremos como positivo el sentido de la directriz al foco; situemos el origen de coordenadas en el punto medio entre el foco y la directriz. Deduzcamos la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas elegido.

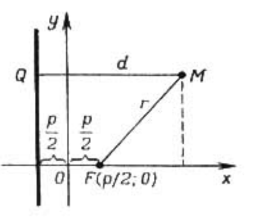


Fig. 62

Sea M (x; y) el punto arbitrario de la parábola. Designemos por r la distancia entre el punto M y el foco F ($r = |FM|$), por d la distancia entre el punto M y la directriz y por p la distancia entre el foco y la directriz (fig. 62). La magnitud p se denomina *parámetro de la parábola* su significado geométrico se aclarará posteriormente. El punto M estará sobre la parábola dada si, y solo si,

$$r = d. \tag{24}$$

Para obtener la ecuación buscada es necesario en la igualdad (24) reemplazar las variables r y d por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. El foco F tiene las coordenadas ($p/2$; 0); por eso según la fórmula (4) del § 1 resulta

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,. \tag{25}$$

Designemos por Q el pie de la perpendicular trazada del punto M a la directriz. Es obvio que el punto Q tiene las coordenadas ($-p/2$; y). De aquí, y de la fórmula (4) del § 1 obtenemos

$$d = |MQ| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x + \frac{p}{2}\,. \tag{26}$$

Reemplazando en la igualdad (24) r y d por sus expresiones (25) y (26), encontramos

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}\,. \tag{27}$$

Esta es precisamente la ecuación buscada de la parábola. Reduzcamos la ecuación de la parábola a una forma más cómoda; para esto elevaremos ambos miembros de la igualdad (27) al cuadrado. Obtenemos

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

o bien

$$y^2 = 2px. \tag{28}$$

Cerciorémonos de que, elevados al cuadrado ambos miembros de la ecuación (27), la ecuación (28) no ha adquirido raíces «superfluas». Para esto basta mostrar que para todo punto cuyas coordenadas x e y satisfacen la ecuación (28) se cumple la relación (24). En efecto, de la ecuación (28) se desprende que $x \geqslant 0$, por eso para los puntos con abscisas no negativas $d = \frac{p}{2} + x$. Sustituyendo el valor de y^2 de (28) en la expresión (25) para r y teniendo en cuenta que $x \geqslant 0$, obtenemos que $r = \frac{p}{2} + x$, o sea las magnitudes r y d son iguales, y esto es lo que se quería mostrar. Así que, la ecuación (28) se satisface por las coordenadas de los puntos de la parábola dada, y sólo por ellas, o sea, la ecuación (28) es ecuación de la parábola dada.

La ecuación (28) se llama *ecuación canónica de la parábola*, que es una ecuación de segundo grado. Así pues, la parábola es una línea de segundo orden.

Investiguemos ahora la forma de la parábola según su ecuación (28).

Puesto que la ecuación (28) contiene y sólo en forma de potencia par, la parábola es simétrica al eje Ox. Por consiguiente, basta considerar sólo la parte de la parábola que está en el semiplano superior. Para esta parte $y \geqslant 0$, por eso, despejando la y en la ecuación (28), obtenemos

$$y = \sqrt{2px}. \tag{29}$$

De la ecuación (29) se deducen las afirmaciones siguientes:

1) si $x < 0$, la ecuación (29) da los valores imaginarios de y. Por lo tanto, a la izquierda del eje Oy no hay ningún punto de la parábola;

2) si $x = 0$, entonces $y = 0$. Por lo tanto, el origen de coordenadas está situado en la parábola y es el punto «más izquierdo» de la misma;

3) al crecer x crece también y, con la particularidad de que si $x \to +\infty$, entonces también $y \to +\infty$.

De esta manera, el punto variable $M(x; y)$ que se desplaza por la parábola parte del origen de coordenadas al crecer x y se mueve «a la derecha» y «hacia arriba»; en este caso para $x \to +\infty$ el punto M se aleja infinitamente tanto del eje Oy como del eje Ox.

Reflejando simétricamente la parte considerada de la parábola respecto al eje Ox, obtenemos toda la parábola (fig. 63) definida por la ecuación (28).

El punto O se llama *vértice de la parábola* y el eje de simetría (eje Ox), *eje de la parábola*. El número p, o sea, el parámetro de la parábola expresa, como es sabido, la distancia que media del foco a la directriz. Aclaremos cómo el parámetro de la parábola influye en su forma. Para esto tomemos cualquier valor determinado de la abscisa, por ejemplo $x = 1$, y de la ecuación (28) hallemos los valores

correspondientes de la ordenada: $y = \pm\sqrt{2p}$. Obtenemos sobre la parábola dos puntos $M_1(1; +\sqrt{2p})$ y $M_2(1; -\sqrt{2p})$, simétricos respecto al eje de la misma; la distancia entre ellos es igual a $2\sqrt{2p}$. De aquí sacamos la conclusión de que esta distancia es tanto mayor cuanto mayor es p. Por lo tanto, el parámetro p caracteriza «la anchura» del dominio limitado por la parábola. Precisamente en esto consiste el *significado geométrico* del parámetro p.

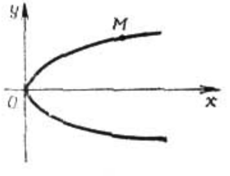


Fig. 63

La parábola cuya ecuación $y^2 = -2px$, $p > 0$, está situada a la izquierda del eje de ordenadas (fig. 64, *a*). El vértice de esta parábola coincide con el origen de coordenadas, el eje Ox es el eje de simetría.

Por analogía con lo dicho anteriormente, se puede afirmar que la ecuación $x^2 = 2py$, $p > 0$, es la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas, pero en este caso el eje Oy es el eje de simetría (fig. 64, *b*). Esta parábola está situada

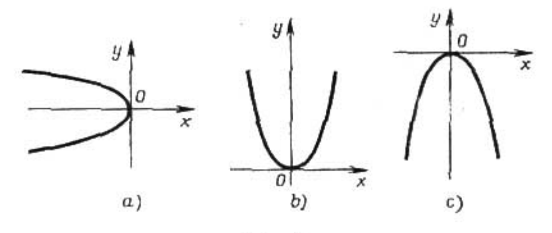


Fig. 64

por encima del eje de abscisas. La ecuación $x^2 = -2py$, $p > 0$, define la parábola que está situada más abajo del eje Ox y tiene por vértice el origen de coordenadas (fig. 64, *c*). La ecuación de la parábola representada en la fig. 65 tiene la forma

$$x^2 = 2p(y - a), \quad p > 0, \quad a < 0$$

y la ecuación de la parábola representada en la fig. 66 tiene la forma siguiente:

$$y^2 = 2p(x - b), \quad p > 0, \quad b > 0.$$

○ **Ejemplo 3.** Se da la ecuación de la parábola $y^2 = 6x$. Escríbase la ecuación de su directriz y hállense las coordenadas de su foco.

Resolución. Comparando la ecuación dada con la ecuación canónica de la parábola (29), sacamos la conclusión de que $2p = 6$, de

donde $p=3$. Puesto que el foco de la parábola tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ y la directriz tiene la ecuación $x=-\frac{p}{2}$, para la parábola dada obtenemos las coordenadas $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ y la ecuación de la directriz es $x=-\frac{3}{2}$. ●

Ejercicio. Escriba la ecuación de la parábola que tiene por vértice el origen de coordenadas y la ecuación de la directriz, si se conoce que el eje Ox es eje de simetría y que el punto de intersección de las rectas $y=x$ y $x+y=2$ se encuentra en la parábola. (*Resp.* $y^2=x$; $x=-1/4$.)

En conclusión consideremos algunos ejemplos más referentes a la forma de hallar el conjunto de los puntos según las ecuaciones que relacionan sus coordenadas.

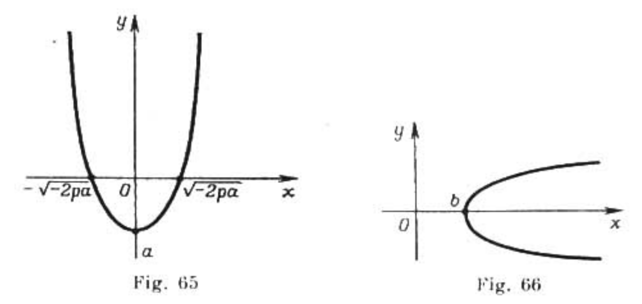


Fig. 65

Fig. 66

○ **Ejemplo 4.** Se dan los puntos $A(-1; 0)$ y $B(2; 0)$. Un punto $M(x; y)$ se mueve de un modo tal que en el triángulo AMB el ángulo ABM queda dos veces mayor que el ángulo MAB. Determinar la trayectoria del punto M (fig. 67).

Resolución. Expresemos $\operatorname{tg} B$ y $\operatorname{tg} A$ mediante las coordenadas de los puntos A, B y M

$$\operatorname{tg} B=\frac{y}{2-x}; \quad \operatorname{tg} A=\frac{y}{x-(-1)}=\frac{y}{x+1}.$$

Ecribamos la ecuación de movimiento del punto. Según los datos del problema $B=2A$, por consiguiente, la ecuación tiene la forma $\operatorname{tg} B=\operatorname{tg} 2A$ o bien

$$\operatorname{tg} B=\frac{2\operatorname{tg} A}{1-\operatorname{tg}^2 A}.$$

Sustituyendo en la ecuación las expresiones halladas para $\operatorname{tg} B$ y $\operatorname{tg} A$

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2},$$

después de simplificar obtenemos la ecuación buscada

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

o sea, la trayectoria de movimiento del punto es hipérbola.

Ejemplo 5. Se dan una circunferencia y un punto A dentro de ésta. Hállese el conjunto de los centros de las circunferencias que son tangentes a la circunferencia dada y pasan por el punto A.

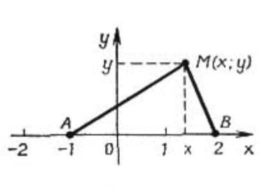


Fig. 67

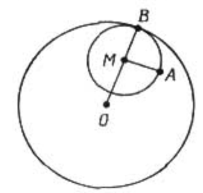


Fig. 68

Resolución. Sea M un punto arbitrario del conjunto buscado, entonces la circunferencia de radio MA es tangente a la circunferencia dada. Sea O el centro de la circunferencia dada; R la longitud de su radio; B el punto de tangencia (fig. 68). Entonces $|OB| = R = |OM| + |MB| = |OM| + |MA|$. Así pues, para el punto M

$$|MO| + |MA| = R,$$

o sea, la suma de sus distancias a dos puntos dados O y A es constante. Por lo tanto, el punto M yace sobre una elipse que tiene por focos los puntos O y A (véase la definición de la elipse).

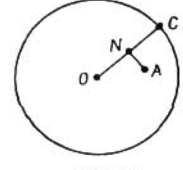


Fig. 69

Mostremos que todos los puntos de dicha elipse pertenecen al conjunto buscado. Sea N un punto arbitrario de esta elipse, o sea, $|NO| + |NA| = R$. Nótese que el punto N está situado dentro del círculo dado, ya que $|ON| < |ON| + |NA| = R$. Supongamos que el rayo ON corta a la circunferencia dada en el punto C (fig. 69). Puesto que $|ON| + |NC| = R$ y $|ON| + |NA| = R$, entonces $|NC| = |NA|$. Por eso la circunferencia que tiene por centro el punto N y por radio NA pasa por el punto C y es en éste tangente a la circunferencia dada.

Ejemplo 6. Demuéstrese que si los ejes de dos parábolas son recíprocamente perpendiculares y éstas se intersecan en cuatro puntos, entonces estos puntos de intersección se encuentran sobre la misma circunferencia.

Resolución. Tomemos los ejes de las parábolas dadas por ejes de coordenadas Ox y Oy (fig. 70). Entonces las ecuaciones de las parábolas tienen la forma

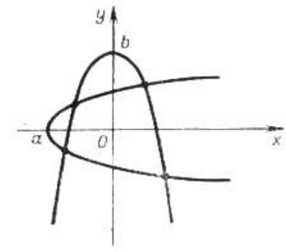


Fig. 70

$$y^2 = 2p(x - a) \tag{30}$$

y

$$x^2 = 2q(y - b). \tag{31}$$

Sumando término a término las ecuaciones (30) y (31), resulta

$$x^2 + y^2 = 2px - 2pa + 2qy - 2qb,$$

de donde

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pa - 2qb. \tag{32}$$

Según los datos del problema las parábolas se cortan en cuatro puntos, por lo tanto, las coordenadas de estos puntos satisfacen la ecuación (30) y (31), así como, por consiguiente, la (32).

Pero la ecuación (32) define, según el signo de su segundo miembro, bien una circunferencia (si el segundo miembro es mayor que cero), o bien un punto (si el segundo miembro es igual a cero), o un conjunto vacío. Puesto que las coordenadas de los puntos satisfacen la ecuación (32), ésta define la circunferencia sobre la cual los puntos dados están situados. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Dese la definición de la elipse y deduzca su ecuación canónica.
2. Investíguese la forma de la elipse valiéndose de su ecuación canónica.
3. ¿Qué es la excentricidad de la elipse y cuál es su significado geométrico?
4. Dese la definición de la hipérbola y dedúzcase su ecuación canónica.
5. Investíguese la forma de la hipérbola valiéndose de su ecuación canónica.
6. ¿Qué es la excentricidad de la hipérbola y cuál es su significado geométrico?
7. ¿Qué propiedad importante poseen la elipse y la hipérbola?
8. Dese la definición de la parábola y deduzca su ecuación canónica.
9. Investíguese la forma de la parábola valiéndose de su ecuación canónica.
10. ¿A qué es igual la excentricidad de la parábola?
11. ¿En qué consiste el significado geométrico del parámetro p en la ecuación de la parábola?
12. ¿Por qué la elipse, la hipérbola y la parábola se llaman líneas de segundo orden?
13. ¿Cómo hallar el punto de intersección de la parábola con la recta, la circunferencia, la elipse y con otra parábola?
14. ¿Qué relación existe entre la elipse y la circunferencia?

§ 5. Fórmulas y hechos fundamentales de la geometría analítica plana

1. Si $M_1\ (x_1)$ y $M_2\ (x_2)$ son dos puntos de la recta numérica, la fórmula

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

expresa el valor del segmento $\overline{M_1M_2}$ y la fórmula

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

expresa la distancia entre los puntos.

2. Una vez elegido en el plano el sistema de coordenadas Oxy, a cada punto del plano se le hace corresponder un par de números $(x;\ y)$, o sea, sus coordenadas. La correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números es biunívoca: a cada punto le corresponde un par de número e inversamente.

3. La distancia entre los puntos $A\ (x_1;\ y_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ se halla por la fórmula

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

4. El área del triángulo que tiene por vértices $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ y $C\ (x_3;\ y_3)$ se halla por la fórmula

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\right|.$$

5. Si un punto $M(x;\ y)$ divide al segmento que tiene por extremos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ en la razón $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, entonces

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

6. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son ciertos números, con la particularidad de que A y B no son iguales a cero simultáneamente (es decir, $A^2 + B^2 \neq 0$), es una recta. Viceversa, cada recta L se define por la ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0.$$

En este caso los números A, B y C se determinan para la recta dada unívocamente con una exactitud de hasta la proporcionalidad: si todos estos números se multiplican por un mismo número μ ($\mu \neq 0$)

la ecuación obtenida

$$(\mu A)\,x + (\mu B)\,y + \mu C = 0$$

define la misma recta L.

7. La ecuación de la recta que pasa por un punto dado $(x_1;\ y_1)$ con un coeficiente angular dado k tiene la forma

$$y - y_1 = k\,(x - x_1).$$

8. La ecuación de la recta que corta al eje Ox en el punto $(a;\ 0)$ y al eje Oy en el punto $(0;\ b)$ tiene la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

que es la ecuación «segmentaria» de la recta.

9. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$ se escribe así:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

10. Si la recta L_1 tiene un coeficiente angular k_1 y la recta L_2, un coeficiente angular k_2, entonces:

a) $k_1 = k_2$ es la condición de paralelismo de las rectas L_1 y L_2;

b) $k_1 \cdot k_2 = -1$ es la condición de perpendicularidad de las rectas L_1 y L_2.

11. La distancia d del punto $M\ (x_0;\ y_0)$ a la recta L definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ se calcula por la fórmula

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

12. La recta $Ax + By + C = 0$ divide el plano en dos semiplanos: uno, el conjunto de los puntos $(x;\ y)$ para los cuales $Ax + By + C > 0$ y otro, el conjunto de los puntos $(x;\ y)$ para los cuales $Ax + By + C < 0$.

13. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

donde a y b son los números dados, y $R > 0$, es una circunferencia que tiene por centro el punto $(a;\ b)$ y por radio R.

14. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los números positivos dados es una elipse con los semiejes a y b y el centro en el origen de coordenadas.

15. El conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los números positivos dados, es una hipérbola con los semiejes transverso y no transverso a y b y el centro de simetría en el origen de coordenadas.

16. El conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$y^2 = 2px \ (x^2 = 2py),$$

donde p es el número dado, es una parábola que tiene como vértice en el origen de coordenadas y como eje de simetría Ox (como eje de simetría Oy).

§ 6. Problemas de control

2.1. Constrúyanse los puntos A (2; 3), B (4; —1), C (—1; 7), D (—2; —3), E (0; 2), F (4; 0).

2.2. Sin construir el punto A (1; —3) aclare en qué cuadrante está situado éste.

2.3. ¿En qué cuadrantes puede encontrarse un punto si su abscisa es positiva?

2.4. Sobre el eje Ox se toma un punto con la coordenada (—5). ¿Cuáles son las coordenadas de este punto en el plano?

2.5. Los puntos A (3; 2) y B (a; —1) están situados sobre una recta paralela al eje Oy. Hállese el valor de a.

2.6. M *es el punto medio del segmento* OA *que une el origen de coordenadas* con el punto A (—5; 2). Hállense las coordenadas del punto M.

2.7. Se dan los puntos A $(x_1; y_1)$ y B $(x_2; y_2)$. Muéstrase que la fórmula de la distancia entre los puntos A y B no depende de los signos de sus coordenadas.

2.8. a) ¿Qué punto está más lejos del eje Ox: A (2; —5) ó B (3; 4)? b) ¿Cuál de estos puntos está más lejos del eje Oy? c) ¿A qué son iguales las distancias del punto A $(a; b)$ a los ejes Ox y Oy, respectivamente?

2.9. Costrúyanse los puntos A (4; 1), B (3; 5), C (—1; 4) y D (0; 0). Si los puntos están construidos correctamente, se obtiene un cuadrado. ¿Cuál es el área de éste? ¿A qué es igual la longitud del lado del cuadrado? Determínense las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrado.

2.10. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de una placa homogénea que tiene la forma de un triángulo con los vértices A (2; 4), B (0; 1), C (4; —2) (fig. 71).

2.11. Los puntos A (—2; 1); B (2; 3) y C (4; —1) son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determínense las coordenadas de sus vértices.

2.12. En el plano se dan los puntos A (0; 0), B $(x_1; y_1)$ y D $(x_2; y_2)$ (fig. 72). ¿Qué coordenadas debe tener el punto C para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo?

2.13. El área de un triángulo es igual a 10 unidades cuadradas, dos de sus vértices son los puntos A (5; 1) y B (—2; 2). Hállense las coordenadas de su tercer vértice si se conoce que éste está situado sobre el eje de abscisas.

2.14. Hállese el área de un cuadrilátero que tiene por vértices los puntos A (3; 1), B (4; 6), C (6; 3) y D (5; —2).

2.15. Se dan las coordenadas polares de un punto: $\rho = 10$; $\varphi = 30°$. Deter-

mínense las coordenadas cartesianas rectangulares de este punto si se conoce que el polo del sistema polar se encuentra en el punto (2, 3;) y el eje polar es paralelo al eje de abscisas.

2.16. Determínese la distancia entre dos puntos, conociendo sus coordenadas polares: $\rho_1 = 3$, $\varphi_1 = 30°$; $\rho_2 = 5$, $\varphi_2 = 120°$.

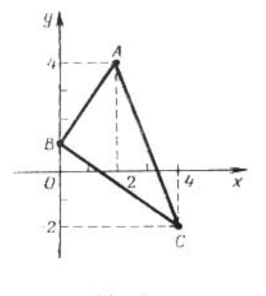


Fig. 71

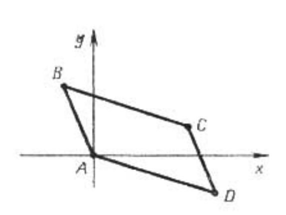


Fig. 72

2.17. Hállese el conjunto de los puntos cuyas coordenadas están ligadas por las relaciones siguientes: **1.** a) $y = |x|$; b) $x = |y|$; c) $|y| = |x|$. **2.** $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$. **3.** $x + |x| = y + |y|$. **4.** $(x - y)(x - 2y) = 0$. **5.** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$. **6.** $x + y > 0$. **7.** $x + y > 1$. **8.** $x - y < 1$. **9.** $\begin{cases} x - y > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases}$ **10.** $(x - y)(x - 2y) > 0$.

2.18. Escríbanse las ecuaciones que describen los siguientes conjuntos de los puntos: a) la recta que es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto (1; 0); b) la recta que es paralela a la recta $y = x$ y pasa por el punto (—3; 7); c) el conjunto de los puntos que se encuentran a la distancia 2 del eje de coordenadas Oy.

2.19. Hállense las relaciones entre x e y que representan en el plano de coordenadas: a) un par de rectas $y = 3x$ e $y = x - 3$; b) la recta $y = x$ y el punto (—1; 2); c) toda la parte del plano que está por encima de la recta $y = x$ (incluyendo esta recta); d) una parte del plano entre las rectas $y = 0$ e $y = 1$ (sin estas rectas); e) el interior del cuadrado que tiene por vértices los puntos (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0).

2.20. Sobre un plano se dan tres puntos: A (3; —6), B (—200; 400), C (1000; —2000). Demuéstrese que estos puntos están sobre una misma recta.

2.21. Determínese cuáles de los tres puntos siguientes A (1; 3), B (—2; 1), C (—1; 7), D (3; 1) se encuentran sobre una misma recta.

2.22. Aplíquese la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano de coordenadas a la demostración del teorema siguiente: en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de todos sus lados.

2.23. Detemínese: a) si el punto N (4,1; 1,9) está sobre la circunferencia que tiene por centro el punto C (1; —2) y por radio 5 (pruebe hacer uso de la fig. 73); b) si el punto K $(0; 2\sqrt{6} - 2)$ está sobre esta misma circunferencia; c) si el punto A (160; —1) se halla en la circunferencia que tiene por centro el punto (147; —6) y por radio 13.

2.24. Escríbase la ecuación de la circunferencia con el centro en el punto C (—2; 3) y el radio igual a 5. Se conoce que el punto A (a; —1) está sobre esta circunferencia. Determínese a.

2.25. Escríbase la ecuación de cada una de las cuatro rectas representadas en la fig. 74.

2.26. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a la bisectriz del cuadrante I y pasa por el punto (0; —5).

2.27. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = 2x + 1$ y, además: a) pasa por el punto (0; 2); b) pasa por el punto (1; —1).

2.28. Se da la recta $2x + y - 6 = 0$ y sobre ella dos puntos A y B con las ordenadas $y_A = 6$ e $y_B = -2$. Escríbase la ecuación de la altura AD del triángulo AOB y hállese la longitud de esta altura y el área del triángulo AOB.

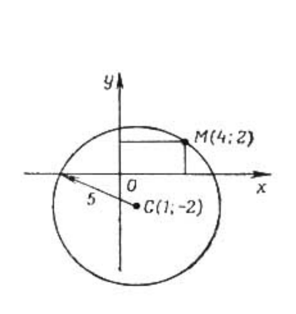


Fig. 73

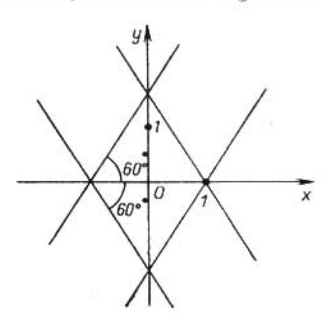


Fig. 74

2.29. Determínese la ecuación de la recta que pasa por el punto (—1; 1) de un modo tal que el punto medio del segmento de esta recta comprendido entre las rectas $x + 2y - 1 = 0$ y $x + 2y - 3 = 0$ esté sobre la recta $x - y - 1 = 0$.

2.30. Determínense las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $3x + 4y - 1 = 0$ y $4x - 3y + 5 = 0$.

2.31. Hállese el conjunto de los puntos M, cuya diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados A y B es igual a la magnitud dada a. ¿Para qué valores de a el problema tiene solución?

2.32. Hállense las coordenadas de un punto que está situado en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y se halla alejado a igual distancia de los puntos (1; 3) y (—2; 2).

2.33. Determínese la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, que pasa por el punto (1; 2).

2.34. Escríbase la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$, y $x^2 + y^2 = 2by$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

2.35. Plantéense las ecuaciones de las tangentes comunes a las circunferencias $x^2 + y^2 = 6x$ y $x^2 + y^2 = 6y$.

2.36. Fórmese la ecuación de la parábola que pasa por el punto (6; 9) y tiene por vértice el origen de coordenadas y por eje de simetría el eje Oy.

2.37. Las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ están disminuidas dos veces. Determínese la ecuación de la curva obtenida.

2.38. Determínense los semiejes de la elipse $3x^2 + 5y^2 - 30 = 0$.

2.39. Hállese la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (1; 4) y (7; 2) y es simétrica respecto a los ejes Ox y Oy.

2.40. Se da la elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Hállese la ecuación de la hipérbola que tiene por foco los vértices de la elipse dada y por vértices sus focos.

2.41. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ el cual es perpendicular a la recta $5x+2y-13=0$.

2.42. Determínese la distancia mínima entre el punto M_0 y los puntos de la circunferencia Γ si:

a) M_0 $(6;\ -8)$; Γ: $x^2+y^2=9$;

b) M_0 $(-7;\ 2)$; Γ: $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

2.43. Determínese si la recta asignada L corta a la circunferencia dada Γ, o es tangente a ésta o pasa fuera de ella:

a) L: $2x-y-3=0$; Γ: $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

b) L: $x-2y-1=0$; Γ: $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

c) L: $x-y+10=0$; Γ: $x^2+y^2-1=0$.

2.44. Constrúyase la elipse $9x^2+25y^2=225$. Determínense: a) sus semiejes; b) las coordenadas de sus focos; c) su excentricidad; d) las ecuaciones de las directrices.

2.45. Determínese si la recta asignada L corta la elipse dada Γ, o es tangente a ésta o pasa fuera de ella:

a) L: $2x-y-3=0$, Γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

b) L: $2x+y-10=0$, Γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

c) L: $3x+2y-20=0$, Γ: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

2.46. Constrúyase la hipérbola $16x^2-9y^2=144$. Hállense: a) sus semiejes real e imaginario; b) las coordenadas de sus focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de sus asíntotas; e) las ecuaciones de sus directrices.

2.47. Constrúyase la hipérbola $16x^2-9y^2=-144$, «conjugada» de la hipérbola $16x^2-9y^2=144$ dada en el problema 2.46. Determínese: a) su excentricidad; b) las ecuaciones de sus directrices.

2.48. Hállense los conjuntos de los puntos cuyas coordenadas están ligadas por las relaciones:

a) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0, \\ 3x+5y-15<0, \\ y+2>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0, \\ y+3>0, \\ x+y-2<0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0; \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^2-10x<0, \\ 5x-3y-15<0, \\ y-2<0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2\geqslant 144. \end{cases}$

2.49. Determínese el conjunto de los puntos para los cuales el producto de sus distancias a dos rectas dadas que se intersecan es igual a $C=\text{const}$.

2.50. Determínese el conjunto de los centros de las circunferencias que pasan por el punto dado A y tocan la recta dada L.

3

TEORÍA DE LOS LÍMITES

En este capítulo se examina la teoría fundamental de la matemática, o sea, la teoría de los límites. Esta teoría es el fundamento sobre el que está construida una magnífica obra que lleva el nombre de «análisis matemático». Actualmente el análisis matemático es un instrumento insustituible de investigación en los más distintos dominios de la ciencia y la técnica. Ahora el conocimiento del cálculo diferencial e integral es indispensable a todo ingeniero y colaborador científico. Sin embargo, para estudiar el análisis matemático y poder emplearlo correctamente es necesario primero dominar la teoría de los límites.

El estudio de la teoría de los límites comenzó en la matemática elemental donde con ayuda de los pasos al límite se determinan la longitud de la circunferencia, el volumen del cilindro y del cono, etc. Esta teoría se utiliza también al determinar la suma de la progresión geométrica decreciente. La operación de paso al límite es una de las principales del análisis matemático. En este capítulo vamos a considerar la forma elemental de la operación de paso al límite, basada en el concepto de límite de una sucesión numérica.

§ 1. Sucesiones numéricas

1. Sucesiones numéricas y operaciones aritméticas con ellas. Progresiones. Las sucesiones numéricas ya se encuentraon en el programa de enseñanza secundaria. De ejemplos de tales sucesiones sirven: 1) la sucesión de los términos de las progresiones aritmética y geométrica; 2) la sucesión de los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscritos en la circunferencia dada; 3) la sucesión $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, ... de los valores aproximados de $\sqrt{2}$. Vamos a precisar y extender el concepto de sucesión numérica.

Definición 1. *Si a cada número n de la serie natural de números*

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

se le hace corresponder un número real x_n, el conjunto de los números reales

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \quad (1)$$

se llama sucesión numérica o simplemente sucesión [1]).

Los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ los denominaremos *elementos* (o *términos*) de la sucesión (1); el símbolo x_n, *elemento general* (o *término general*) de la sucesión y el número n, su *número de orden* [2]). En forma abreviada la sucesión (1) se designará con el símbolo $\{x_n\}$. Así, por ejemplo, el símbolo $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ designa la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

La fórmula que define x_n se llama *fórmula del elemento general* (o del *término general*) de la sucesión $\{x_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{n^2\}$ está definida por la fórmula $x_n = n^2$. Con ayuda de esta fórmula se puede calcular todo elemento de la sucesión; $x_1 = 1^2 = 1$, $x_5 = 5^2 = 25$, $x_{10} = 10^2 = 100$, etc.

○ **Ejemplo 1.** Se da la fórmula del elemento general de la sucesión: $x_n = \frac{n}{n+1}$. Escríbanse los primeros cinco elementos de la sucesión.

Resolución. Poniendo sucesivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en el elemento general x_n, obtenemos $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 4/5$, $x_5 = 5/6$. ●

Ejercicios. Escríbanse los primeros cinco elementos de cada una de las sucesiones definidas por sus elementos generales:

1. $x_n = \frac{1}{2n+1}$. (*Resp.* $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/5$, $x_3 = 1/7$; $x_4 = 1/9$, $x_5 = 1/11$).
2. $x_n = \frac{n+2}{n^3+1}$. (*Resp.* $x_1 = 3/2$; $x_2 = 4/9$, $x_3 = 5/28$, $x_4 = 6/65$, $x_5 = 7/126$.)
3. $x_n = \frac{n}{2^{n+1}}$. (*Resp.* $x_1 = 1/2^2$, $x_2 = 2/2^3$, $x_3 = 3/2^4$, $x_4 = 4/2^5$, $x_5 = 5/2^6$).
4. $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n^2}$. (*Resp.* $x_1 = 2$; $x_2 = -3/2^2$, $x_3 = 4/3^2$, $x_4 = -5/4^2$, $x_5 = 6/5^2$.)

○ **Ejemplo 2.** Conociendo unos cuantos primeros elementos de la sucesión, escríbase la fórmula del elemento general de la sucesión $1; 1/3^2; 1/5^2; 1/7^2; \ldots$.

---

[1]) Con otras palabras, la sucesión numérica puede definirse como un conjunto de pares de números $(n; x_n)$ en los cuales el primer número toma sucesivamente los valores de $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, o sea, $(1; x_1)$, $(2, x_2)$, $(3, x_3)$, $\ldots$, $(n; x_n)$, $\ldots$.

[2]) El número de orden del elemento ha de entenderse en sentido usual, por ejemplo, como un número bajo el cual aparece un jockeísta o un futbolista.

Resolución. Los denominadores de los elementos dados de la sucesión forman la sucesión de todos los números naturales impares elevados a la potencia 2. Por eso en calidad de la fórmula buscada se puede elegir la siguiente:

$$x_n=\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Sin embargo, el conocimiento de algunos primeros elementos de una sucesión no determina todavía la misma sucesión. Por eso el problema dado debe considerarse como un problema de determinación de cierta regularidad inductiva simple que concuerde con los elementos dados de la sucesión. ●

Ejercicios. Conociendo algunos primeros elementos de una sucesión, escríbase la fórmula del elemento general de las sucesiones siguientes:

1. $1;\ \frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ \ldots\ \left(\textit{Resp.}\ x_n=\frac{1}{n!}.\right)$

2. $1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25};\ \ldots\ \left(\textit{Resp.}\ x_n=\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2.\right.$

Indicación: $\left.1;\ \frac{3^2}{2^2};\ \frac{5^2}{3^2};\ \frac{7^2}{4^2};\ \ldots\right).$

3. $2;\ 10;\ 26;\ 82;\ 242;\ 730;\ \ldots$ (*Resp.* $x_n=3^n+(-1)^n$.

Indicación: $3-1;\ 3^2+1;\ 3^3-1;\ 3^4+1;\ 3^5-1;\ 3^6+1;\ \ldots$).

La fórmula que define x_n no es única. Así, por ejemplo, la sucesión: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ se define por la fórmula $x_n=(-1)^n$ o por la fórmula $x_n=\cos\pi n$. No siempre la sucesión $\{x_n\}$ puede ser representada analíticamente, por ejemplo, la sucesión de los valores aproximados de $\sqrt{2}$.

La sucesión $\{x_n\}$ se considera definida si se indica el método de obtención de todo elemento suyo. Por ejemplo, si $x_n=1+(-1)^n$, la sucesión se escribirá en la forma $0, 2, 0, 2, \ldots$. Convirtiendo la fracción 1/3 en fracción decimal, también obtenemos la sucesión $x_1=0{,}3,\quad x_2=0{,}33,\quad x_3=0{,}333,\ \ldots,\ x_n=\underbrace{0{,}333\ldots3\ldots}_{n\ \text{ternas}}$.

Con frecuencia se utiliza el método recurrente de representar la sucesión $\{x_n\}$. Este método consiste en que se dan: 1) el primer elemento de la sucesión x_1 (o varios primeros elementos) y 2) la fórmula (o la relación recurrente) que indica qué operaciones deben ejecutarse para calcular el elemento siguiente (o varios elementos siguientes). Así, si se conoce que: 1) el primer elemento $x_1=1$ y 2) para todo $n\geqslant 1$ $x_{n+1}=(n+1)\,x_n$, entonces, cumpliendo sucesivamente las operaciones definidas por la fórmula dada, resulta

$$(n=1)\ x_2=x_{1+1}=(1+1)\cdot x_1=2\cdot 1!=2!,$$
$$(n=2)\ x_3=x_{2+1}=(2+1)\cdot x_2=3\cdot 2!=6=3!,$$

$(n = 3)\ x_4 = x_{3+1} = (3 + 1)\cdot x_3 = 4\cdot 3! = 24 = 4!,$
$(n = 4)\ x_5 = x_{4+1} = (4 + 1)\cdot x_4 = 5\cdot 4! = 120 = 5!,$
. . . .

De esta manera, la relación recurrente dada define la sucesión 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, . . ., $n!$, . . . [1]) en la cual el elemento general se define por la fórmula $x_n = n!$ Nótese que al deducir estrictamente la fórmula del elemento general hace falta emplear el método de inducción matemática. (Hágase esto por sí mismo.)

Ejercicios. Escríbanse los primeros cinco elementos y la fórmula del elemento general de las sucesiones siguientes: **1.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n!$ (*Resp.* 1!, 1!, 1!, 1!, 1!, $x_n = 1!$) **2.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$. (*Resp.* 1, 4, 7, 10, 13; $x_n = 3n - 2$.)

Citemos un ejemplo más. La sucesión $\{x_n\}$ se define por los primeros dos elementos $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y por la relación recurrente $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para todo $n \geqslant 3$. Aquí la relación recurrente liga x_n con los dos precedentes. Para obtener la sucesión es necesario conocer los primeros dos elementos de la sucesión. Escribamos varios primeros elementos de la misma:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots.$$

Esta sucesión posee una serie de propiedades interesantes e importantes. Sus elementos se llaman *números de Fibonacci* (nombre del matemático italiano que vivió en los siglos XII—XIII). Si en el primer ejemplo es fácil encontrar la fórmula del elemento general conociendo el primer elemento y la relación recurrente, para los números de Fibonacci es bastante difícil hallar la fórmula mencionada. [2])

Geométricamente la sucesión $\{x_n\}$ se representa sobre la recta numérica en forma de una sucesión de puntos, cuyas coordenadas son iguales a los elementos correspondientes de la sucesión. En la fig. 75 se muestran las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ respectivamente.

Puede resultar que el mismo punto de la recta numérica corresponde a varios elementos de la sucesión, por ejemplo, para la sucesión con el elemento general $x_n = (-1)^n$ todos los elementos con números pares caen al punto con la coordenada 1, y con números impares, al punto que tiene por coordenada -1; para la sucesión con el elemento general $x_n = 5$, o sea, para la sucesión 5, 5, 5, 5, . . ., todos los elementos caerán al mismo punto con las coordenadas 5.

---

[1]) Recuérdese que $n!$ es la designación abreviada del producto $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ por definición $1! = 1$.

[2]) Para familiarizarse con los números de Fibonacci y sus propiedades recomendamos, por ejemplo, el libro: *N. N. Vorobiev.* Números de Fibonacci. M., Mir. 1974.

Introduzcamos el concepto de operaciones aritméticas con sucesiones numéricas. Supongamos que se dan las sucesiones arbitrarias $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Se llama *producto* de la

Fig. 75

sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por el número m a la sucesión

$$mx_1, mx_2, \ldots, mx_n, \ldots.$$

Se llama *suma* de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots;$$

diferencia de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n, \ldots;$$

producto de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots;$$

cociente de las sucesiones dadas a la sucesión

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots,$$

si todos los elementos de la sucesión por la que se divide son distintos del cero.

Las operaciones indicadas que se realizan con las sucesiones se escriben simbólicamente así:

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \quad \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\},$$
$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\},$$
$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \quad y_n \neq 0\ [1].$$

[1]) $y_n \neq 0$ significa que los valores de y_n se distinguen del cero cualquiera que sea n.

Progresión aritmética. Definición 2. *La sucesión* $\{x_n\}$[1] *definida por el primer elemento* x_1 *y por la relación recurrente*

$$x_{n+1} = x_n + d,$$

donde d es un número constante, se denomina progresión aritmética. El número d se llama razón (diferencia) de la progresión aritmética.

La relación recurrente que define la progresión aritmética viene enunciada así: *todo término de una progresión aritmética, comenzando por el segundo, es igual al precedente sumado con el número constante d.*

Escribamos algunos primeros términos de la progresión aritmética: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + d + d = x_1 + 2d$, etc. Cada vez adicionamos un sumando más d. Por ejemplo, los números pares forman una progresión aritmética con el primer número $x_1 = 2$ y la razón $d = 2$:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ \ldots$$

☐ Vamos a demostrar con ayuda del método de inducción matemática la fórmula del término general de la progresión aritmética

$$x_n = x_1 + d\,(n-1). \tag{2}$$

1) Para $n = 1$ tenemos $x_1 = x_1 + d\cdot 0$, o sea, la fórmula (2) es justa.

2) Suponiendo la validez de la fórmula (2) para cierto n, demostremos que es válida también para $n + 1$, o sea, demostremos la fórmula $x_{n+1} = x_1 + d\,[(n+1) - 1]$.

Efectivamente, por definición de la progresión aritmética, $x_{n+1} = x_n + d$. De aquí, utilizando la fórmula (2), hallamos

$$x_{n+1} = x_1 + (n-1)\,d + d = x_1 + d\,[(n+1) - 1],$$

que es lo que se quería demostrar. Basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula (2) es válida para todo número n.

Deduzcamos la fórmula de la suma de n términos de la progresión aritmética. Previamente demostremos la propiedad principal de los términos de una progresión aritmética finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$: *las sumas de los términos de una progresión que equidistan de sus extremos son iguales, o sea,*

$$x_m + x_n = x_k + x_l$$

si $m + n = k + l$.

En efecto, utilizando la fórmula (2), resulta

$$\begin{aligned} x_m + x_n &= x_1 + d\,(m-1) + x_1 + d\,(n-1) = \\ &= 2x_1 + d\,(m+n-2) = 2x_1 + d\,(k+l-2) = \\ &= x_1 + d\,(k-1) + x_1 + d\,(l-1) = x_k + x_l, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

[1]) A veces los términos de la progresión se designan con la letra a.

Determinemos ahora la suma S_n. Escribamos esta suma dos veces, poniendo los sumandos en diferente orden:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n,$$
$$S_n = x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1.$$

Sumando término a término y utilizando la propiedad demostrada y la fórmula (2), hallamos

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) = n(x_1 + x_n) = n[2x_1 + d(n-1)],$$

de donde obtenemos las dos fórmulas siguientes:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)\cdot n}{2} \text{ y } S_n = \frac{[2x_1 + d(n-1)]\cdot n}{2}$$ ■

○ **Ejemplo 3.** Escríbase la fórmula del término general de la sucesión si se conocen varios primeros términos suyos: 3, 5, 7, 9, 11, ...

Resolución. Los números dados forman la progresión aritmética que tiene por primer término $x_1 = 3$ y por razón $d = 2$. Según la fórmula (2) tenemos $x_n = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$.

Ejemplo 4. La suma de los primeros n términos de una sucesión se expresa por la fórmula $S_n = 3n^2$. Demuéstrese que esta sucesión es una progresión aritmética; hállese su primer miembro y su razón.

Resolución. Tenemos $x_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 = 3(2n - 1)$. Puesto que la razón $x_n - x_{n-1} = 3(2n-1) - 3(2n-3) = 6n - 3 - 6n + 9 = 6$ no depende de n, la sucesión dada es una progresión aritmética que tiene por razón $d = 6$. El primer miembro de la progresión $x_1 = S_1 = 3$. ●

Progresión geométrica. Definición 3. *La sucesión* $\{x_n\}$ *definida por el primer elemento* x_1 *y por la relación recurrente*

$$x_{n+1} = x_n \cdot q,$$

donde q *es un número constante* ($q \neq 1$) *se llama progresión geométrica. El número* q *se denomina razón de la progresión geométrica.*

La relación recurrente que define la progresión geométrica viene enunciada así: *todo término de la progresión geométrica, comenzando por el segundo, es igual al precedente multiplicado por el número constante* q.

Escribamos algunos primeros términos de la progresión geométrica: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 \cdot q$, $x_3 = x_2 \cdot q = x_1 \cdot qq = x_1q^2$, etc. Por ejemplo, los números 2, 6, 18, 54, 162, . . . forman una progresión geométrica que tiene por razón $q = 3$ y por primer término $x_1 = 2$.

La fórmula del término general de la progresión geométrica

$$x_n = x_1q^{n-1} \tag{3}$$

se demuestra de un modo exactamente igual que la fórmula del término general de la progresión aritmética (hágase esto de manera independiente).

□ Deduzcamos la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica [1]. Para esto consideremos la suma

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{4}$$

y multipliquemos ambos miembros de la igualdad (4) por q. Puesto que $x_1q = x_2$, $x_2q = x_3$, ..., $x_nq = x_{n+1}$, entonces

$$S_n \cdot q = x_1q + x_2q + \ldots + x_nq = x_2 + x_3 + \ldots$$
$$\ldots + x_{n+1}. \tag{5}$$

Sustrayemos, término a término, de la igualdad (5) la igualdad (4). Todos los términos, salvo $x_{n+1} = x_nq$ y x_1, se suprimen. Por eso resulta

$$S_nq - S_n = x_{n+1} - x_1 = x_nq - x_1,$$

de donde

$$S_n = \frac{x_nq - x_1}{q-1} \quad \text{o bien} \quad S_n = \frac{x_1 - x_nq}{1-q}. \tag{6}$$

Puesto que $x_n = x_1q^{n-1}$, la fórmula (6) puede escribirse de otro modo:

$$S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q-1} \quad \text{o bien} \quad S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}. \quad ■ \tag{7}$$

○ **Ejemplo 5.** Hállese en la progresión geométrica 1; —2; 4; —8; 16 el término 11 y la suma de seis términos.

Resolución. Determinemos primero la razón de la progresión geométrica. Para esto hágase uso de la relación recurrente. Tenemos

$$q = \frac{x_{n+1}}{x_n}; \quad q = \frac{x_5}{x_4} = \frac{16}{-8} = -2.$$

Con ayuda de la fórmula (3) calculemos el término 11:

$$x_{11} = x_1q^{11-1} = 1\,(-2)^{10} = 1024$$

y por la primera de las fórmulas (7) calculemos la suma de seis términos:

$$S_6 = \frac{1\cdot[(-2)^6 - 1]}{-2-1} = \frac{64-1}{-3} = -21. \quad ●$$

Téngase presente que el material ulterior puede ser estudiado felizmente sólo a condición de que quede comprendida bien la definición de la sucesión.

[1] La deducción de la fórmula de la suma de una progresión geométrica decreciente infinita se da en el párrafo siguiente (véase el ejemplo 7).

2. Sucesiones acotadas y no acotadas.

Definición 4. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama acotada superiormente (inferiormente) si existe un número* M *(un número* m*) tal que todo elemento* x_n *de esta sucesión satisfaga la desigualdad* $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$.

Definición 5. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se dice acotada si está acotada superior e inferiormente, o sea, existen los números* m *y* M *tales que todo elemento* x_n *de esta sucesión satisface las desigualdades* $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Designemos $A = \text{máx}\{|m|, |M|\}$. Entonces la condición de acotación de la sucesión puede escribirse en la forma $|x_n| \leqslant A$, o bien $-A \leqslant x_n \leqslant A$. Efectivamente, puesto que $A \geqslant |M| \geqslant M$ y $-A \leqslant -|m| \leqslant m$, para todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las desigualdades $-A \leqslant x_n \leqslant A$.

Definición 6. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama no acotada si para todo número positivo* A *existe un elemento* x_n *de esta sucesión que satisface la desigualdad* $|x_n| > A$ [1]).

De las definiciones dadas se deduce que si la sucesión está acotada superiormente, todos sus elementos pertenecen al infervalo en sentido lato $(-\infty, M]$ y si la sucesión está acotada inferiormente, al intervalo $[m, +\infty)$; en caso de que la sucesión esté acotada superior e inferiormente, sus elementos pertenecen al intervalo $[m, M]$. La sucesión no acotada puede ser acotada superiormente (inferiormente). Vamos a considerar algunos ejemplos.

○ **1.** La sucesión $\{n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ está acotada inferiormente, pero no está acotada superiormente $(m = 1)$.

2. La sucesión $\{-n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ está acotada superiormente, pero no está acotada inferiormente $(M = -1)$.

3. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ o bien, lo que es lo mismo, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$ está acotada, ya que todo elemento x_n de esta sucesión satisface las desigualdades $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ $(m = 0, \ M = 1)$.

4. La sucesión $\{(-1)^n n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n n \ldots$ está no acotada. En efecto, cualquiera que sea el número A entre los elementos x_n de esta sucesión siempre habrá elementos para los cuales se cumplirá la desigualdad $|x_n| > A$. ●

Ejercicios. ¿Están acotadas o no las sucesiones siguientes?:. **1.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. (*Resp.* Sí.). **2.** $\{2n\}$. (*Resp.* No.) **3.** $\{\ln n\}$. (*Resp.* No.) **4.** $\{\operatorname{sen} n\}$. (*Resp.* Sí.) **5.** $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots$ (*Resp.* No.) (Argumente las respuestas).

3. Sucesiones infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

---

[1]) Si $|x_n| > A$ $(A > 0)$, entonces o bien $x_n > A$, o bien $x_n < -A$ (demuéstrese esto por sí mismo).

Definición 7. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama infinitamente grande si para todo número positivo A (cualquiera que sea de grande) existe un número de orden N tal que para $n > N$* [1]) *se cumple la desigualdad* $|x_n| > A$.

Observación. Es evidente que toda sucesión infinitamente grande no está acotada. Sin embargo, una sucesión no acotada puede no ser infinitamente grande. Por ejemplo, la sucesión no acotada 1, 2, 1, 3, . . ., 1, n, 1, $n+1$, . . . no es infinitamente grande, puesto que para $A > 1$ la desigualdad $|x_n| > A$ no tiene lugar para todos los elementos x_n con números impares.

Definición 8. *La sucesión $\{\alpha_n\}$ se llama infinitamente pequeña si para todo número positivo ε (cualquiera que sea de pequeño) existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad* $|\alpha_n| < \varepsilon$.

○ **Ejemplo 6.** Utilizando la definición 7, demuéstrese que la sucesión $\{n\}$ es infinitamente grande.

Resolución. Tomemos todo número $A > 0$. De la desigualdad $|x_n| = |n| > A$ obtenemos $n > A$. Si se toma $N \geqslant A$, entonces para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n| > A$, o sea, según la definición 7 la sucesión $\{n\}$ es infinitamente grande. ●

Ejercicios. Haciendo uso de la definición 7, demuéstrese que las sucesiones: **1.** $\{-n\}$. **2.** $\{n^2\}$. **3.** $\{(-1)^{n+1}n\}$ son infinitamente grandes.

○ **Ejemplo 7.** Utilizando la definición 8, demuéstrese que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es infinitamente pequeña.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. De la desigualdad $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ obtenemos $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Si se toma $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ [2]), para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. (Para $\varepsilon = \frac{1}{10}$ obtenemos $N = [10] = 10$, para $\varepsilon = 4/15$ tenemos $N = [15/4] = 3$, etc.). Por lo tanto, según la definición 8, la sucesión $\{1/n\}$ es infinitamente pequeña. ●

Ejercicios. Utilizando la definición 8, determínese si son infinitamente pequeñas las sucesiones siguientes:
1. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. **2.** $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}(k > 0)$. **3.** $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$.
(**Indicación**: Hágase uso de la desigualdad $\frac{2n}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$.)

[1]) «Para $n > N$» significa para todos los elementos de la sucesión con números $n > N$.

[2]) El símbolo $[x]$ denota el número entero máximo que no supera x. Por ejemplo, $[1] = 1$, $[3,1] = 3$, $[0,7] = 0$, $[-0,5] = -1$, $[-172,9] = -173$, $[\pi] = 3$, $[\log 2] = 0$, etc.

Al final del subpárrafo dado vamos a demostrar un teorema que establece la relación entre las sucesiones infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

Teorema 3.1. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande y todos sus términos se distinguen del cero, $x_n \neq 0$, la sucesión $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña e, inversamente, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, $\alpha_n \neq 0$, la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinitamente grande.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión infinitamente grande. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Según la definición 7 para este número A existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n| > A$. Entonces $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$, o sea, $|\alpha_n| < \varepsilon$ para todos los números $n > N$. Y esto quiere decir que la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña.

La segunda parte del teorema se demuestra de un modo análogo. ■

Todas las demostraciones efectuadas están basadas en la comprobación del cumplimiento de las condiciones enunciadas en las definiciones. Por eso es necesario comprender claramente las definiciones dadas.

4. Propiedades fundamentales de las sucesiones infinitamente pequeñas.

Teorema 3.2. *La suma y la diferencia de dos sucesiones infinitamente pequeñas son sucesiones infinitamente pequeñas.*

□ **Demostración.** Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitamente pequeñas. Se necesita demostrar que la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Sea ε un número positivo arbitrario; N_1, el número de orden comenzando por el cual $|\alpha_n| < \varepsilon/2$, y N_2, el número de orden comenzando por el cual $|\beta_n| < \varepsilon/2$. (Tales números de orden N_1 y N_2 se determinarán según la definición de la sucesión infinitamente pequeña.) Tomemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$; entonces para $n > N$ se cumplirán simultáneamente dos desigualdades: $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ y $|\beta_n| < \varepsilon/2$. Por consiguiente, para $n > N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ [1].

Esto quiere decir que la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

---

[1]) Aquí hemos utilizado la propiedad de los valores absolutos $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (véase el teorema 1.3).

Corolario. *La suma algebraica de todo número finito de sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

Teorema 3.3. *El producto de dos sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

□ **Demostración.** Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitamente pequeñas. Es necesario demostrar que $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña. Puesto que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es infinitamente pequeña, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N_1 tal que $|\alpha_n| < \varepsilon$ para $n > N_1$ y puesto que la sucesión $\{\beta_n\}$ es también infinitamente pequeña, para $\varepsilon = 1$ existe un número de orden N_2 tal que $|\beta_n| < 1$ para $n > N_2$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$; entonces para $n > N$ se cumplirán ambas desigualdades. Por lo tanto, para $n > N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

Corolario. *El producto de todo número finito de sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

Observación. El cociente de dos sucesiones infinitamente pequeñas puede ser toda sucesión y puede no tener sentido. Por ejemplo, si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n$, todos los elementos de la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ son iguales a la unidad y la sucesión dada está acotada. Si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ es infinitamente grande y, viceversa, si $\alpha_n = 1/n^2$ y $\beta_n = 1/n$, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Si comenzando por cierto número de orden los elementos de la sucesión $\{\beta_n\}$ son iguales a cero, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ no tiene sentido.

Ejercicio. Mostrar que el cociente de dos sucesiones infinitamente grandes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ puede ser toda sucesión, utilizando a título de ejemplos las sucesiones $\{n\}$ y $\{n^2\}$.

Teorema 3.4. *El producto de una sucesión acotada por otra sucesión que es infinitamente pequeña es una sucesión infinitamente pequeña.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y $\{\alpha_n\}$, una sucesión infinitamente pequeña. Se necesita demostrar que la sucesión $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ es infinitamente pequeña. La sucesión $\{x_n\}$ está acotada, por eso existe un número $A > 0$ tal que todo elemento x_n safistace la desigualdad $|x_n| \leqslant A$. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, para el número positivo ε/A existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon/A$. Entonces para $n > N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que la sucesión $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

Corolario. *El producto de una sucesión infinitamente pequeña por un número es una sucesión infinitamente pequeña.*

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de sucesión.
2. ¿Cuándo la sucesión se considera definida? Cítense ejemplos.
3. ¿En qué consiste la representación recurrente de una sucesión? Cítese un ejemplo.
4. Dese la interpretación geométrica de sucesión. Cítense ejemplos.
5. Dese la definición de las operaciones aritméticas con las sucesiones.
6. ¿Por qué de la definición de la sucesión se deduce que ésta tiene un número infinito de elementos?
7. Enúnciese la definición de progresión aritmética.
8. Dedúzcase la fórmula de la suma de n términos de una progresión aritmética.
9. Enúnciese la definición de progresión geométrica.
10. Dedúzcase la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica.
11. Enúnciense las definiciones de una sucesión acotada y no acotada. Dese la interpretación geométrica de estas definiciones.
12. Cítese un ejemplo de una sucesión acotada que tiene: a) los elementos máximo y mínimo; b) el elemento máximo, pero no tiene el mínimo; c) el elemento mínimo, pero no tiene el máximo.
13. Enúnciense las definiciones de las sucesiones infinitamente pequeña e infinitamente grande. Dese la interpretación geométrica de estas definiciones.
14. Cítese un ejemplo de una sucesión no acotada que no sea infinitamente grande.
15. ¿Puede llamarse infinitamente pequeña la sucesión que tiene un elemento común $x_n = 0$?
16. Cítese un ejemplo cuando los valores de los elementos de una sucesión infinitamente pequeña al crecer tienden a cero. ¿Cómo se llama tal sucesión?
17. Cítese un ejemplo cuando los valores de los elementos de una sucesión infinitamente grande al crecer n decrecen. ¿Cómo se llama tal sucesión?
18. Se da la sucesión $1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{3};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 4;\ \frac{1}{5};\ \ldots,\ n;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ ¿Por qué esta sucesión no es infinitamente pequeña a pesar de que por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$ que tomamos entre los elementos de la sucesión siempre habrá elementos menores en módulo que ε? ¿Por qué esta sucesión no es infinitamente grande, a pesar de que por grande que sea el número $A > 0$ que tomamos entre los elementos de la sucesión siempre habrá elementos mayores en módulo que A? ¿Cómo se llama esta sucesión?
19. ¿Es acotada la sucesión infinitamente pequeña?
20. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es: 1) infinitamente pequeña; b) infinitamente grande. ¿Se deduce de aquí que la sucesión $\{1/x_n\}$ (a condición de que $x_n \neq 0$ para todos los n) es: a) infinitamente grande; b) infinitamente pequeña?

§ 2. Sucesiones convergentes

En este párrafo se considera el concepto de límite de una sucesión numérica que es uno de los conceptos más importantes en el análisis matemático.

1. Concepto de sucesión convergente.

Definición. *El número a se llama límite de la sucesión numérica $\{x_n\}$ si para todo número positivo ε existe un número de orden N tal*

que para $n > N$ se cumple la desigualdad

$$| x_n - a | < \varepsilon. \quad (1)$$

En este caso la sucesión $\{x_n\}$ se llama *convergente*.

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge y tiene por su límite el número a, esto se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ [1]) o bien } x_n \to a \text{ para } n \to \infty.$$

La sucesión que no es convergente se llama *divergente*.

De la definición de límite se deduce que, por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$, comenzando por cierto número de orden N todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se diferenciarán del número a en menos de ε, o sea $| x_n - a | < \varepsilon$ para $n > N$. Esto significa precisamente que los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se aproximan indefinidamente al número a siempre que crezca indefinidamente el número de orden n.

No es casual que en la definición se destaca la palabra «todo». En esta palabra «se apoya» toda la definición.

A título de ejemplo examinemos la cuestión sobre el límite de la sucesión

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots.$$

Con el aumento de n esta sucesión no tiene límite, ya que oscila entre los valores de $+1$ y -1 sin acercarse a ningún número (véase la demostración estricta en la observación para el teorema 3.6).

«Demostremos», utilizando la definición, que la sucesión tiene «límite igual a 0». Efectivamente, para $\varepsilon = 2$ la desigualdad $| (-1)^n - 0 | < \varepsilon$ se cumple para todos los números de orden n. Por consiguiente, se puede tomar $N = 1$ y todo «quedará demostrado». El error consiste en el hecho de que, por ejemplo, para $\varepsilon = 1/2$ la desigualdad $| (-1)^n - 0 | < \varepsilon$ ya no se cumple para ningún n, o sea, durante «la demostración» no se observa la exigencia principal de la definición consistente en que la desigualdad $| x_n - a | < \varepsilon$ se cumpla para *todo* número $\varepsilon > 0$, en particular, también para $\varepsilon = 1/2$, al menos comenzando por cierto número de orden N.

Enunciemos la definición siguiente: *el número a no es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo número de orden N habrá un número de orden $n > N$ tal que se cumple la desigualdad* $| x_n - a | \geqslant \varepsilon$.

Comparando las definiciones dadas, vemos que para construir la negación es necesario reemplazar recíprocamente las palabras «existe» y «todo» y sustituir la desigualdad por la contraria.

---

[1]) Esta notación se lee así: «el límite de x_n para n que tiende al infinito es igual a a».

Esta regla puede utilizarse también para construir la negación en todas otras definiciones dadas en el sentido de «$\varepsilon - N$».

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición de límite, mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$, para encontrar los valores de n que satisfagan la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ basta resolver la inecuación $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, de donde resulta $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. *Por lo tanto, por N se puede tomar* la parte entera del número $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, o sea, $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Entonces la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ se cumplirá para todos los números $n > N$. Puesto que ε es todo número, queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Según la definición en este ejemplo a es igual a 1.

Para comprender más claramente la definición de límite comprobemos los cálculos realizados con números concretos.

Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}01$. Entonces $N = \left[\frac{1-0{,}01}{0{,}01}\right] = 99$ y para $n > N = 99$ tenemos $|x_n - 1| < 0{,}01$. En particular, para $n < N$ ($n = 97$, $n = 98$) la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon = 0{,}01$ no se cumple. En efecto, sea $n = 98$. Entonces

$$|x_{98} - 1| = |98/99 - 1| = |-1/99| = 1/99 > 1/100$$

y si se toma $n > 99$, por ejemplo, $n = 100$, entonces

$$|x_{100} - 1| = |100/101 - 1| = |-1/101| = 1/101 < 1/100.$$

Ahora bien, la desigualdad $|x_n - 1| < 0{,}01$ se cumple sólo para números de orden n mayores que 99.

Si se toma el valor de $\varepsilon < 0{,}01$, *por ejemplo*, $\varepsilon = 0{,}001$, el valor del número de orden N aumentará. En efecto, $N = \left[\frac{1-0{,}001}{0{,}001}\right] = 999$ y para $n > N = 999$ obtenemos $|x_n - 1| < 0{,}001$.

En conclusión mostremos que el número 2 no es límite de la sucesión dada. Para esto consideremos el valor absoluto de la diferencia

$$|x_n - 2| = \left|\frac{n}{n+1} - 2\right| = \left|-\frac{n+2}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1}$$

y resolvamos respecto a n la desigualdad $\frac{n+2}{n+1} < \varepsilon$. Sin embargo, en el caso dado se puede no hacer esto, ya que para todo valor del

número de orden n (n puede ser sólo un número entero y positivo) el número $\frac{n+2}{n+1} > 1$ y, por consiguiente, no puede ser menor que un número positivo arbitrario dado ε, por ejemplo, $\varepsilon = 1/2$. Esto demuestra precisamente que el número 2 no es límite de la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Ejemplo 2. Utilizando la definición de límite, demuéstrese que si $|q| < 1$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0. \qquad (2)$$

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y $q \neq 0$. Puesto que para $|q^n - 0| = |q|^n$, para hallar valores de n que satisfagan la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$ basta resolver la inecuación $|q|^n < \varepsilon$ o bien, para no utilizar los logaritmos negativos ($|q| < 1$), $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Después de la logaritmación resulta

$$n \log \frac{1}{|q|} > \log \frac{1}{\varepsilon},$$

de donde $n > \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/|q|)}$. Por lo tanto, si se toma $N = \left[\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/|q|)}\right]$, para todos los $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$. Puesto que ε es todo número, entonces según la definición $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Si $q = 0$, la relación (2) es evidente, ya que la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$ se cumple para todo número n.

Ejemplo 3. Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Resolución. Mostremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Puesto que $\sqrt[n]{n} > 1$, entonces $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$, de donde resulta $n < (1 + \varepsilon)^n$.

Hagamos uso del hecho de que

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \qquad (3)$$

(aquí hemos empleado la fórmula del binomio de Newton [1]) y demostremos que la desigualdad $n < (1 + \varepsilon)^n$ se cumple para $n > 1 + 2/\varepsilon^2$. Efectivamente, sea $n \geqslant (1 + \varepsilon)^n$; entonces de la de-

[1]) Recuérdese que la fórmula del binomio de Newton tiene la forma $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$.

sigualdad (3) se desprende que $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, de donde $n < 1 + 2/\varepsilon^2$. Por eso para $n > 1 + 2/\varepsilon^2$ la desigualdad $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$ no se cumple y, por consiguiente, se cumple la desigualdad $n < (1+\varepsilon)^n$ y, por lo tanto, también la desigualdad $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. Así pues, si se toma $N = [1 + 2/\varepsilon^2]$, para $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Puesto que ε es todo número, entonces, según la definición, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ●

Ejercicios. a) Utilizando la definición de límite, demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$. **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-1}{3^n} = 1$. (**Indicación:** represéntese la expresión del elemento general de la sucesión en la forma $x_n = (3^n-1)/3^n = 1 - 1/3^n$ o bien $x_n - 1 = -1/3^n$.) **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. **5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$.

b) Se conoce que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$. Determínese el número de orden N comenzando con el cual se cumple la desigualdad $\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0,1$; $0,01$; $0,001$. $\Big($*Resp.* La desigualdad $\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ se cumple para $n > N = [1/\varepsilon - 1]$. Para $\varepsilon = 0,1$ la desigualdad se cumple comenzando por $N = 10$; para $\varepsilon = 0,01$, comenzando por $N = 100$; para $\varepsilon = 0,001$, por $N = 1000$.)

Observación 1. Supongamos que $\{x_n\}$ converge y tiene por su límite cierto número a. Entonces la diferencia $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, ya que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ [1]). Por consiguiente, todo elemento x_n de una sucesión convergente que tiene por límite el número a puede ser representado en la forma

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{4}$$

donde α_n es un elemento de la sucesión infinitamente pequeña $\{\alpha_n\}$. Es obvio que es válido también lo inverso: si x_n puede representarse en la forma $x_n = a + \alpha_n$, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (demuéstrese esto por sí mismo). La representación (4) será utilizada para demostrar los teoremas 3.7 a 3.9 sobre los límites de las sucesiones.

○ **Ejemplo 4.** Demuéstrese que el límite de la sucesión C, C, C, . . . con el término general $x_n = C = \text{const}$ es igual al número C, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

---

[1]) De aquí, en particular, se deduce que toda sucesión infinitamente pequeña es convergente y tiene por su límite el número $a = 0$.

Resolución. Efectivamente, la sucesión $\{x_n - C\} = C - C = 0$ y por eso, en virtud de la representación (4), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$. ●

Observación 2. El límite de la sucesión numérica tiene una interpretación geométrica. La desigualdad (1) es equivalente a las desigualdades

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$ [1])

que significan que el elemento x_n se encuentra en el ε-entorno del punto a (fig. 76). Por eso la definición de límite de una sucesión puede enunciarse del modo siguiente: *el número a se llama límite de la sucesión $\{x_n\}$ si para todo ε-entorno del punto a existe un número de orden N tal que todos los elementos x_n con los números de orden $n > N$ estén en este ε-entorno.*

○ Para ilustrar lo dicho retornemos una vez más al ejemplo 1. Si $\varepsilon = 0{,}01$ y $n > 99$, todos los términos de la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ comenzando por el término que lleva el número de orden $n = 100$ (x_{100}) caerán al ε-entorno dado del número $a = 1$ $(-0{,}01 < x_n - 1 < 0{,}01$ ó $1 - 0{,}01 < x_n < 1 + 0{,}01)$, o sea en la recta numérica pertenecerán al intervalo $(0{,}99; 1{,}01)$. ●

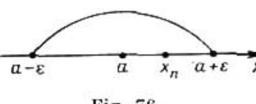


Fig. 76

Cabe señalar que el número N en la definición de límite de una sucesión depende tanto de la sucesión que se considera como del número ε tomado arbitrariamente. Cuanto menor sea ε, tanto mayor será N (véase el ejemplo 1), a excepción del caso cuando la sucesión se compone de un solo elemento. Por ejemplo, la sucesión 1, 1, 1, 1, . . ., definida por el elemento general $x_n = 1$, tiene por su límite el número 1 (véase el ejemplo 4) y la desigualdad $|x_n - 1|$ se cumple para todo número N independientemente del número ε tomado.

Observación 3. Es evidente que las sucesiones infinitamente grandes no tienen límite en el sentido en que hemos definido el límite anteriormente. Por eso se considera, por lo general, que las sucesiones infinitamente grandes tienen un límite igual a ∞ y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$ [2]).

Si la sucesión $\{x_n\}$ es tal que para todo $A > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $x_n > A$ $(x_n < -A)$, se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$. En todos estos

[1]) Véase el teorema 1.2.

[2]) Recuérdese que aquí la sucesión $\{x_n\}$ es tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n| > A$.

casos se dice que la sucesión infinitamente grande tiene *límite infinito* igual a ∞, $+\infty$ o bien $-\infty$, respectivamente:

Puesto que hemos introducido el concepto de «límite infinito» convengamos en llamar límite finito al definido inicialmente.

Ejercicio. Cítense ejemplos de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ y, además:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$. $\left(\textit{Resp.}\ \{x_n\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\}\right.$ e $\left.\{y_n\} = \{-n\}.\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. (*Resp.* $\{x_n\} = \{2n\}$ e $\{y_n\} = \{-n\}$.)
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 1$. (*Resp.* $\{x_n\} = \{n+1\}$ e $\{y_n\} = \{-n\}$.)
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ no existe. (*Resp.* $\{x_n\} = \{n + (-1)^n\}$ e $\{y_n\} = \{-n\}$.) (Argumente las respuestas.)

2. Propiedades fundamentales de las sucesiones convergentes. Antes de pasar a la demostración del teorema siguiente, demostremos el lema.

Lema 3.1. *Si todos los elementos de una sucesión infinitamente pequeña* $\{\alpha_n\}$ *son iguales al mismo número* c, *entonces* $c = 0$.

□ **Demostración.** Supongamos lo contrario, es decir, que $c \neq 0$. Pongamos $\varepsilon = |c|/2$. Entonces, según la definición de sucesión infinitamente pequeña, existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. Puesto que $\alpha_n = c$ y $\varepsilon = |c|/2$, la última desigualdad puede escribirse en la forma $|c| < |c|/2$, de donde $1 < 1/2$. La contradicción obtenida muestra que la suposición de que $c \neq 0$ no puede tener lugar. ■

Teorema 3.5. *La sucesión convergente tiene un solo límite.*

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, es decir, que la sucesión convergente $\{x_n\}$ tiene dos límites a y b. Entonces según la fórmula (4) para los elementos x_n resulta

$$x_n = a + \alpha_n \quad \text{y} \quad x_n = b + \beta_n,$$

donde α_n y β_n son los elementos de las sucesiones infinitamente pequeñas $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$. Restando de la primera relación la segunda, encontramos que $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Puesto que todos los elementos de la sucesión infinitamente pequeña $\{\alpha_n - \beta_n\}$ tienen el mismo valor constante $b - a$, según el lema demostrado 3.1 $b - a = 0$, o sea, $b = a$. ■

Teorema 3.6. *La sucesión convergente está acotada.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y el número a, su límite. Sea luego ε un número positivo arbitrario y N, el número de orden comenzando por el cual se cumple $|x_n - a| < \varepsilon$. Entonces para todos los números $n > N$

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon\ ^{1)}.$$

Sea $A = \text{máx}\,\{|a| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Es obvio que $|x_n| \leqslant A$ para todos los números de orden n, lo que significa precisamente que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. ■

Observación. Una sucesión acotada puede ser también no convergente. Por ejemplo, la sucesión $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ está acotada, pero no convergente. Efectuemos los razonamientos por reducción al absurdo. Supongamos que el límite de la sucesión dada es el número a. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, en particular, también para $\varepsilon = 1/2$, existe un número de orden N tal que para $n > N$ tendremos $|x_n - a| < 1/2$. Puesto que x_n toma alternativamente los valores 1 y -1, se puede escribir $|1 - a| < 1/2$ y $|(-1) - a| < 1/2$. Utilizando estas desigualdades, tenemos

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leqslant |1 - a| + |a - (-1)| < \\ < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

o sea $2 < 1$. La contradicción obtenida demuestra el carácter divergente de la sucesión dada.

○ **Ejemplo 5.** Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande y la sucesión $\{y_n\}$ tiene límite finito, distinto del cero ($y_n \neq 0$). ¿Qué se puede decir de las sucesiones: 1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{y_n/x_n\}$; 3) $\{x_n/y_n\}$?

Resolución. 1) Puesto que la sucesión $\{y_n\}$ converge, entonces según el teorema 3.6 está acotada, o sea, para todos los números n se cumple la desigualdad $|y_n| < A$, y puesto que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande, comenzando por cierto número de orden n se cumplirá la desigualdad $|x_n| > A + M$, donde M es todo número positivo. Entonces comenzando por cierto número de orden n se cumplirá la desigualdad

$$|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n| > (A + M) - A = M\ ^{2)},$$

o sea, $|x_n + y_n| > M$ y esto, según la definición de la sucesión infinitamente grande, significa precisamente que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ es infinitamente grande.

2) La sucesión $\{y_n/x_n\}$ es infinitamente pequeña, ya que puede ser representada en la forma: $\{1/x_n\} \cdot \{y_n\}$, donde según el teorema 3.1 la sucesión $\{1/x_n\}$ es infinitamente pequeña, la sucesión $\{y_n\}$, según el teorema 3.6, está acotada, y según el teorema 3.4 la sucesión $\{1/x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente pequeña.

---

[1]) Véase la llamada en la pág. 109.

[2]) Aquí hemos utilizado la propiedad de los valores absolutos $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ (véase el teorema 1.4).

3) Puesto que la sucesión $\{y_n/x_n\}$ (véase el caso 2) es infinitamente pequeña, entonces, según el teorema 3.1, la sucesión $\{x_n/y_n\}$ es infinitamente grande. ●

Demostremos los teoremas siguientes.

Teorema 3.7. *La suma (diferencia) de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es una sucesión convergente cuyo límite es igual a la suma (diferencia) de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ **Demostración.** Sean a y b los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Entonces, según la fórmula (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son las sucesiones infinitamente pequeñas. Por lo tanto,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

Según el teorema 3.2, la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Por lo tanto, la sucesión $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\}$ es tamdién infinitamente pequeña y por eso la sucesión $\{x_n \pm y_n\}$ converge y tiene por límite el número $a \pm b$. ■

○ **Ejemplo 6.** Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge y la sucesión $\{y_n\}$ diverge. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la sucesión $\{x_n + y_n\}$?

Resolución. Efectuemos los razonamientos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge. Entonces, según el teorema 3.7, la sucesión $\{y_n\}$ también converge, ya que $\{y_n\} = \{(x_n + y_n) - x_n\}$. Pero según los datos del problema la sucesión $\{y_n\}$ diverge. La contradicción obtenida demuestra que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ diverge. ●

Teorema 3.8. *El producto de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es una sucesión convergente cuyo límite es igual al producto de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ **Demostración.** Sean a y b los límites de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, respectivamente. Entonces, según la fórmula 4,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitamente pequeñas. Por lo tanto,

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Según los teoremas 3.2 a 3.4 la sucesión $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Así pues, la sucesión $\{x_n y_n - ab\}$ también es infinitamente pequeña y por eso la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ converge y tiene por límite el número $a \cdot b$. ■

○ **Ejemplo 7.** Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ es una progresión geométrica que tiene por razón q, con la particularidad de que $|q| < 1$ y $x_1 \neq 0$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}. \tag{5}$$

Resolución. Puesto que (véase la fórmula (7) del § 1)

$$S_n = \frac{x_1 - x_1 q^n}{1-q} = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q}\cdot q^n$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (véase el ejemplo 2), entonces, pasando al límite para $n \to \infty$ y empleando los teoremas 3.7 y 3.8 resulta

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q}\cdot 0 = \frac{x_1}{1-q}. \quad ●$$

El límite (5) se llama *suma de una progresión geométrica infinita decreciente* y se designa de ordinario con S.

Por ejemplo, la suma de la progresión geométrica infinita decreciente es $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8},\ \ldots,$ donde $x_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}$, o sea, $|q| = \frac{1}{2} < 1$, es

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Teorema 3.9. *El cociente de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es a condición de que el límite $\{y_n\}$ sea distinto del cero*[1]*, una sucesión convergente cuyo límite es igual al cociente de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

□ **Demostración.** Sean a y b ($b \neq 0$) los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ respectivamente. Entonces, según la fórmula (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

[1]) Según la condición $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ los elementos y_n comenzando con cierto número de orden N no se anulan, por eso el cociente $\{x_n/y_n\}$ tiene razón para todos los números $n > N$.

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitamente pequeñas. Por consiguiente,

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{by_n}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Conforme a las propiedades de las sucesiones infinitamente grandes el factor $\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$ es una sucesión infinitamente pequeña. Mostremos que $\{1/y_n\}$ es una sucesión acotada. Puesto que $y_n\to b$, $b\neq 0$ para $n\to\infty$, entonces para $\varepsilon=|b|/2$ habrá un número de orden N tal que para todos los $n>N$ sea $|y_n-b|<|b|/2$. Entonces

$$|y_n|=|b-(b-y_n)|\geqslant|b|-|y_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}\text{ [1]}.$$

de donde $|y_n|>|b|/2$ y, por lo tanto, $|1/y_n|<2/|b|$ para todos los $n>N$ lo que significa precisamente que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada.

Según el teorema 3.4 la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ es infinitamente pequeña, por eso la sucesión $\{x_n/y_n-a/b\}$ también es infinitamente pequeña. Por consiguiente, la sucesión $\{x_n/y_n\}$ converge y tiene por límite el número a/b. ■

Los teoremas demostrados en este subpárrafo tienen importancia primordial tanto teórica como práctica. Pese a la sencillez de estos teoremas su aplicación correcta ofrece gran dificultad para muchos principiantes. Es necesario sobre todo tener presente el hecho de que el empleo de los teoremas exige la existencia de límites finitos. Mostremos qué errores pueden cometerse si no se tiene en cuenta este hecho.

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}$. Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5+0=5$$

y por el otro

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{\infty}{\infty}=1.$$

Hemos obtenido la igualdad incorrecta $5=1$.

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$. Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$$

[1]) Véase la llamada en la pág. 118.

y por el otro,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\infty\cdot 0=0.$$

Hemos obtenido la igualdad incorrecta $1=0$.

Por último, consideremos la sucesión 1, 1, 1, 1, . . . que tiene por elemento general $x_n=1$. Por un lado, $\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$ y por el otro,

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}[(n+1)-n]=\lim_{n\to\infty}(n+1)-\lim_{n\to\infty}n=\infty-\infty=0.$$

Hemos obtenido una vez más la igualdad incorrecta $1=0$.

En todos los casos considerados hemos cometido un gran error: hemos empleado incorrectamente los teoremas de los límites del cociente, del producto y de la diferencia, o sea, las sucesiones $\{5n+1\}$, $\{n\}$ y $\{n+1\}$ no tienen límites finitos.

Nótese una vez más que la notación $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ no designa ningún número y es sólo la expresión de que los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ crecen indefinidamente en valor absoluto. Por eso el símbolo ∞ no puede tratarse al igual que los números y no se puede escribir $\frac{\infty}{\infty}=1$ ó $\infty\cdot 0=0$, o bien $\infty-\infty=0$.

Las faltas de tal género se encuentran con frecuencia al determinar el límite de una sucesión dada en forma de una razón de dos expresiones o en forma de la diferencia de éstas. Por ejemplo, el teorema del límite del cociente no puede ser empleado inmediatamente si el numerador o el denominador no tienen límites finitos o el límite del denominador es igual a cero. En tales casos es necesario transformar previamente la sucesión dada. A menudo es útil dividir el numerador y el denominador por la misma expresión o multiplicarlos por ésta. Este procedimiento será utilizado reiteradamente a continuación.

Consideremos ahora los ejemplos más típicos.

○ **Ejemplo 8.** Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

Resolución. Para $n\to\infty$ el numerador y el denominador tienden hacia el infinito y no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite del cociente, ya que en la hipótesis de este teorema se supone la existencia de límites finitos. Por eso primero transformemos la sucesión dada dividiendo el numerador y el denominador por n^2. Luego, empleando el teorema del límite del cociente y el del

límite de la suma, hallamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n+1/n^2}{3-1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-1/n^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)}=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

Ejemplo 9. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$.

Resolución. Al igual que en el ejemplo 8, en el primer sumando de la expresión que está bajo el signo del límite no se puede utilizar inmediatamente el teorema del límite del cociente. Por eso, dividiendo primero el numerador y el denominador por n y luego empleando el teorema del límite del cociente y el del límite de la suma, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+1/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}=\frac{5}{1+0}=5.$$

El segundo sumando de la expresión que está bajo el signo del límite puede considerarse como producto de la sucesión acotada $\{\operatorname{sen} n\}$ ($|\operatorname{sen} n|\leqslant 1$) y de la sucesión infinitamente pequeña $\{1/n\}$. Según el teorema 3.4 el segundo sumando es una sucesión infinitamente pequeña y su límite es igual a cero. Por consiguiente, finalmente resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n}=5+0=5.$$

En una forma más compacta la resolución del ejemplo puede escribirse del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+1/n}+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}+\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen} n\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{1+0}+0=5.$$

Adquirida cierta práctica, la notación detallada puede ser abreviada.

Ejemplo 10. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{n+1/n}=0,$$

ya que para $n \to \infty$ la sucesión $\{2 - 3/n\}$ está acotada (muestre esto por sí mismo), la sucesión $\{n + 1/n\}$ es infinitamente grande (muestre esto de manera independiente) y según el teorema 3.1 la *sucesión* $\left\{\frac{1}{n+1/n}\right\}$ *es infinitamente pequeña.* Por consiguiente, en virtud del teorema 3.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{3}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{n+1/n}\right]=0.$$

Ejemplo 11. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+4/n^3}{1/n+5n^3}=\infty,$$

ya que para $n \to \infty$ la sucesión $\{z_n\} = \{2 + 4/n^3\}$ es convergente ($z_n \to 2$), la sucesión $\{1/z_n\}$ está acotada (muestre esto de manera *independiente), la sucesión* $\{y_n\} = \{1/n + 5/n^3\}$ *es infinitamente* pequeña (muestre esto por cuenta propia) y según el teorema 3.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\left(y_n\cdot\frac{1}{z_n}\right)=0,$$

entonces la sucesión dada, en virtud del teorema 3.1, es infinitamente grande y su límite es igual a ∞.

Ejemplo 12. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Resolución. Aquí, aunque en el numerador hay una suma, no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite de la suma, puesto que el número de sumandos no es finito y depende de n (con el aumento de n el número de sumandos también aumenta). Por eso, efectuemos una transformación. Puesto que $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es la suma de los términos de la progresión aritmética que tiene por razón $d = 1$ y esta suma es igual a $\frac{(1+n)\,n}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\,n}{2n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 13. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots+1/3^n}$.

Resolución. Puesto que $1+q+q^2+\ldots+q^n$ es la suma de $n+1$ términos de la progresión geométrica que tiene por razón q (en el numerador $q=1/2$ y en el denominador $q=1/3$) y esta suma es

igual a $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots+1/3^n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-1/2^{n+1})(1-1/3)}{(1-1/2)(1-1/3^{n+1})}=\frac{(1-0)(1-1/3)}{(1-1/2)(1-0)}=\frac{2/3}{1/2}=\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 14. Hállese $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Ejemplo 15. Hállese $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)$.

Resolución. Puesto que $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1}=\infty$ (muéstrese esto por sí mismo) y $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n+1}=\infty$ (muestre esto de manera independiente), no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite de la diferencia. Por eso primero transformemos la expresión que está bajo el signo del límite, reduciéndola al denominador común y dividiendo el numerador y el denominador por n^3. Luego, aplicando el teorema del límite del cociente, producto y diferencia, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3/n}{(1+1/n^2)(3+1/n)}=\frac{1-0}{(1+0)(3+0)}=\frac{1}{3}. \quad \bullet$$

Ejercicios. Hállense los límites: **1.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+11}-\frac{\cos n}{10n}\right)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{5}.\right)$ **2.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$. (*Resp.* 10.) **4.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$. (*Resp.* ∞.) **5.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$. (*Resp.* ∞.) **6.** $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$. (*Resp.* 5.) **7.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+3n+2}$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{3}$. **Indicación:** transfórmese previamente el numerador, utilizando la fórmula $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ demostrada en el ejemplo 1 del cap. 1, § 6.$\Big)$ **8.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. (*Resp.* 0.)

3. Paso al límite en las desigualdades.

Teorema 3.10. *Si los elementos de una sucesión convergente* $\{x_n\}$ *comenzando por cierto número de orden satisfacen la desigualdad* $x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), *entonces también el límite a de esta sucesión satisface la desigualdad* $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$).

□ **Demostración.** Supongamos que todos los elementos x_n, comenzando por cierto número de orden, satisfacen la desigualdad $x_n \geqslant b$. Se necesita demostrar la desigualdad $a \geqslant b$. Supongamos lo contrario, que $a < b$.

Puesto que a es el límite de $\{x_n\}$, para $\varepsilon = b - a$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n - a| < b - a$, la cual es equivalente a las dos desigualdades siguientes: $-(b - a) < x_n - a < b - a$. Del segundo miembro de la desigualdad resulta $x_n < b$, pero esto contradice la hipótesis del teorema. El caso $x_n \leqslant b$ se considera de un modo análogo.

Observación. Del teorema se deduce que el signo de una desigualdad no estricta se conserva al pasar al límite. Sin embargo, al pasar al límite en una desigualdad estricta, $x_n > b$ ($x_n < b$), puede *aparecer también el signo de la igualdad*, o sea, $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$). Tomemos, por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$. Es evidente que $x_n = 1/n > 0$ ($b = 0$) para todo número de orden n, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$ ($a = 0$).

○ **Ejemplo 16.** Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, con la particularidad de que comenzando por ciertto número de orden n se cumple la desigualdad $x_n \leqslant y_n$. Demuéstrese que $a \leqslant b$.

Resolución. Efectivamente, comenzando por cierto número de orden n los elementos de la sucesión $\{y_n - x_n\}$ son no negativos y por eso, en virtud del teorema 3.10, también es no negativo su límite:

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = b - a \geqslant 0,$$

de aquí se desprende que $a \leqslant b$. ●

Ejercicio 1. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ y sean todos los elementos $x_n \in [a, b]$, o sea, $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo número de orden n. Demuéstrese que también el límite $c \in [a, b]$, o sea, $a \leqslant c \leqslant b$.
2. Cítese un ejemplo de una sucesión cuando al pasar al límite la desigualdad estricta no se conserva. $\left(Resp.\ \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.\right)$

El teorema siguiente desempeña importante papel en diferentes aplicaciones.

Teorema 3.11. *Supongamos que se dan tres sucesiones* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *relacionadas mediante las desigualdades* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *para todos los números n. En este caso si* $\{x_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *tienen el mismo límite a, entonces* $\{y_n\}$ *también tiene el límite a.*

□ **Demostración.** Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Para este ε en la sucesión $\{x_n\}$ habrá un número de orden N_1 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todos los números $n > N_1$, o sea,

$$\underline{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon. \tag{6}$$

Para este mismo número ε en la sucesión $\{z_n\}$ habrá un número de orden N_2 tal que $|z_n - a| < \varepsilon$ para todos los números $n > N_2$, o sea,

$$a - \varepsilon > \underline{z_n < a + \varepsilon}. \tag{7}$$

Tomemos $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$. Entonces para $n > N$ se cumplirán simultáneamente las desigualdades (6) y (7). Utilizando sus miembros subrayados, así como las desigualdades dadas en la hipótesis del teorema, se puede escribir

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \quad \text{para } n > N.$$

De aquí

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \ \text{ o bien } \ |y_n - a| < \varepsilon \ \text{ para } n > N.$$

Lo último significa que a es el límite de $\{y_n\}$. ■

□ **Ejemplo 17.** Hállense los límites de las sucesiones asignadas por los elementos generales:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Resolución. Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}.$$

Puesto que $1 < \sqrt{1+1/n} < 1 + 1/n$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n) = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, entonces según el teorema 3.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n} = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Análogamente se demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demostremos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Efectivamente, por un lado,

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ sumandos}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n,$$

por otro lado,

$$y_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$$

o sea, resulta $x_n < y_n < z_n$. Y puesto que según lo recién demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, entonces, aplicando una vez más el teorema 3.11, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. ●

Ejercicio. Supongamos que los elementos de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ satisfacen las desigualdades $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ para todos los números de orden n y que la sucesión $\{y_n\}$ es infinitamente pequeña. Determínese: existe o no el límite de la sucesión $\{x_n\}$ y si existe ?a qué es igual y por qué?

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de límite de una sucesión. Dese la interpretación geométrica.
2. Cítese un ejemplo cuando el número de orden N en la definición de límite de una sucesión depende de ε; no depende de ε.
3. ¿Es infinitamente pequeña una sucesión convergente?
4. ¿Es infinitamente grande una sucesión convergente?
5. ¿Puede una sucesión tener dos límites distintos?
6. ¿Puede una sucesión no acotada ser convergente?
7. Cítese un ejemplo de una sucesión acotada que no sea convergente.
8. Cítese un ejemplo de una sucesión convergente y acotada.
9. Cítense ejemplos de sucesiones convergentes cuando: a) los elementos de la sucesión al crecer n se aproximan al límite sólo por un lado; b) por dos lados simultáneamente. Dese una interpretación geométrica.
10. ¿Qué sucesión se llama divergente?
11. Supongamos que en cierto entorno del punto a hay muchos elementos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se deduce de esta hipótesis que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
12. Supongamos que en todo entorno del punto a hay muchos elementos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se deduce de esta hipótesis que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
13. ¿Puede una sucesión con elementos positivos tener límite negativo y una sucesión con elementos negativos tener límite positivo?
14. Cítese un ejemplo cuando al pasar al límite una desigualdad estricta se conserva (no se conserva).
15. Enúnciese el teorema de tres sucesiones.

§ 3. Sucesiones monótonas

1. Definición y criterio de convergencia de las sucesiones monótonas.

Definición. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama creciente si* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$; *no decreciente si* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$; *decreciente si* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$; *no creciente si* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$

Todas tales sucesiones se unen por el nombre común de *monótonas.* Las sucesiones crecientes y decrecientes se denominan también *estrictamente monótonas.*

Consideremos algunos ejemplos de sucesiones monótonas.

○ 1) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ es decreciente y acotada.

2) La sucesión $1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, \ldots, 1/n, 1/n, \ldots$ es no creciente y acotada.

3) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es creciente y no acotada.

4) La sucesión $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots$ es no decreciente y no acotada.

5) La sucesión $1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots$ es creciente y acotada. ●

Al investigar la monotonía de las sucesiones concretas se aclara, ante todo, el signo de la diferencia $x_{n+1} - x_n$ o bien (para las sucesiones positivas) se compara con la unidad la razón $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n = \frac{n}{2n+1}$ es monótona creciente.

Resolución. Es necesario demostrar que $x_{n+1} > x_n$ para todo n. Determinemos x_{n+1} reemplazando n por $n+1$ en la expresión para x_n:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Comparemos los valores de las fracciones $x_n = \frac{n}{2n+1}$ y $x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$; para esto reduzcámoslas al denominador común. Resulta

$$x_{n+1} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n = \frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Puesto que $2n^2+3n+1 > 2n^2+3n$, la primera fracción es mayor que la segunda, por lo tanto, $x_{n+1} > x_n$ para todo número n, que es lo que quería demostrar.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n = \frac{n}{5^n}$ es monótona decreciente.

Resolución. Es necesario demostrar que $x_n > x_{n+1}$ para todo número n. En efecto, consideremos la relación entre el término sucesivo x_{n+1} y el precedente x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{5^{n+1}} : \frac{n}{5^n} = \frac{(n+1)5^n}{5^n 5n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1+\frac{1}{n}}{5} \leqslant \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por consiguiente, $x_n > x_{n+1}$ para todo número n, que es lo que se quería demostrar. ●

Nótese que las sucesiones monótonas están acotadas al menos por un lado: las sucesiones no decrecientes, inferiormente ($x_n \geqslant x_1$ para todos los números n); las no crecientes, superiormente ($x_n \leqslant x_1$ para todos los números n). Resulta que si una sucesión monótona está acotada por ambos lados, o sea, simplemente acotada, ella converge. Las sucesiones no monótonas no poseen esta propiedad. Por ejemplo, la sucesión no monótona $\{(-1)^n\}$ está acotada, pero no converge (véase la observación para el teorema 3.6).

Tiene lugar el siguiente teorema fundamental de las sucesiones monótonas.

Teorema 3.12. *Una sucesión monótona acotada tiene límite.*

□ **Demostración.** Consideremos el caso de una sucesión monótona no decreciente. Sea $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ y sea que existe un número M tal que todos los elementos x_n no son mayores que M, o sea, $x_n \leqslant M$. Consideremos el conjunto numérico X compuesto por los elementos de la sucesión dada. Según los datos del problema este conjunto está acotado superior e inferiormente. Por eso, en virtud del teorema 1.1, el conjunto X tiene una cota superior exacta. Designémosla por a y mostremos que a es el límite de la sucesión dada.

Puesto que a es una cota superior exacta del conjunto de los elementos de la sucesión $\{x_n\}$, según su propiedad para todo número $\varepsilon > 0$ habrá un número de orden N tal que $x_N > a - \varepsilon$. Puesto que $\{x_n\}$ es la sucesión no decreciente, para $n > N$ tenemos $x_n > a - \varepsilon$. Por otro lado, conforme a la definición de la cota superior, $x_n \leqslant a < a + \varepsilon$ para todos los números n. Por lo tanto, para $n > N$ obtenemos las desigualdades $a < \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ de las cuales se deduce la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. Lo último significa precisamente que el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$.

El caso de la sucesión monótona no creciente es análogo. ■

Observación. La condición de que una sucesión monótona esté *acotada es una condición necesaria y suficiente de su convergencia.*

En efecto, si una sucesión monótona está acotada, en virtud del teorema ella converge; en cambio, si una sucesión monótona converge, según el teorema 3.6 ella está acotada.

○ ***Ejemplo 3.*** *Demuéstrese que la sucesión que tiene por término general* $x_n = \frac{n!}{n^n}$ *converge y hállese su límite.*

Resolución. La sucesión dada tiene la forma $1, \frac{1 \cdot 2}{2^2}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3}, \ldots$

$\ldots, \frac{n!}{n^n}, \ldots$. Demostremos primero su convergencia. Para esto, evidentemente, basta mostrar que la sucesión dada es monótona

y acotada. Efectivamente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{n!\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Puesto que $\frac{n^n}{(n+1)^n}<1$, entonces $x_{n+1}<x_n$ y, por lo tanto, la sucesión es monótona decreciente y está acotada superiormente. Como $x_n>0$, ella está acotada inferiormente, verbigracia, por el cero. Por consiguiente la sucesión es monótona y acotada. Según el teorema 3.12 ella converge, es decir, tiene un límite finito.

Vamos a determinar este límite. Designémoslo por a. Puesto que todos los elementos $x_n>0$, según el teorema 3.10 $a\geqslant 0$. Aquí hagamos uso de la desigualdad de Bernoulli [1]):

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh\ (h>-1)$$

realizando su demostración por inducción. Para $n=1$ la desigualdad es evidente (en este caso ella se convierte en igualdad). Supongamos que es válida para $n=k$ y demostremos su validez para $n=k+1$. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $(1+h)$ (el signo de la desigualdad no cambiará, ya que $1+h>0$), resulta

$$(1+h)^{k+1}\geqslant(1+kh)(1+h)=1+kh+h+kh^2\geqslant 1+(k+1)\,h$$

(ya que $kh^2\geqslant 0$), que es lo que se quería demostrar. Continuando la resolución del ejemplo, tenemos

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 1+n\cdot\frac{1}{n}=2.$$

Por lo tanto, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\leqslant\frac{1}{2}$, o bien $x_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}x_n$. Pasando al límite en la última desigualdad cuando $n\to\infty$, obtenemos la desigualdad $a\leqslant\frac{1}{2}a$, de donde $a=0$. De esta manera, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Ejemplo 4. La sucesión $\{x_n\}$ está definida por la relación recurrente $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$. Demuéstrese que esta sucesión tiene un límite y hállese.

Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,$$
$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{raíces}},\ \ldots.$$

Vamos a comprobar el hecho de que el límite exista. Para esto determinemos que la sucesión es monótona y acotada. De la desi-

[1]) Jacobo Bernoulli (1654—1705), matemático suizo.

gualdad

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$$

se desprende que $x_n < x_{n+1}$, o sea, la sucesión es monótona creciente y está acotada inferiormente. Mostremos que la sucesión está acotada también superiormente. En efecto, puesto que $x_1 = \sqrt{2} < 2$, entonces $x_2 = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} = 2$, $x_3 = \sqrt{2+x_2} < \sqrt{2+2} = 2$, ...

Supongamos que queda demostrada la desigualdad $x_n < 2$. Entonces $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$ y ya que $x_1 < 2$, por inducción resulta demostrado que para todo n se cumple la desigualdad $x_n < 2$, o sea, la sucesión está acotada también superiormente.

Así pues, queda determinado que la sucesión dada es monótona y acotada. Según el teorema 3.12 ella tiene un límite finito. Ahora, sabiendo que el límite existe, vamos a encontrarlo. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces también $\lim x_{n+1} = a$, ya que el elemento general x_{n+1} asigna la misma sucesión que x_n. Elevando al cuadrado la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, resulta $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$. Pasando al límite en esta igualdad cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (2+x_n),$$

llegamos a la ecuación $a^2 = 2 + a$. Resolviendo la ecuación obtenida, hallamos $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Puesto que, según lo demostrado anteriormente, la sucesión $\{x_n\}$ crece y según los datos del problema $x_1 > 0$, *el límite debe ser positivo, por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ●

Nótese que el teorema 3.12 determina sólo el hecho de que el límite existe y no habla nada del mismo límite. Sin embargo, en la teoría de los límites esto también tiene gran importancia. A veces es importante sólo saber que el límite existe.

2. Número e. Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ que tiene por elemento general $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

y demostremos que ella converge. Para esto basta mostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y está acotada superiormente.

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, resulta

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Representemos esta expresión en la siguiente forma:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

De modo análogo escribamos el elemento $n+1$:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Ante todo, notemos que $\left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ para $0 < k < n$, o sea, cada sumando en la expresión x_{n+1} es mayor que el sumando correspondiente en la expresión x_n y, además, en comparación con x_n en x_{n+1} se añade un sumando positivo más. Por eso $x_n < x_{n+1}$, o sea, la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y está acotada inferiormente.

Para demostrar el hecho de que la sucesión dada está acotada superiormente nótese que cada expresión puesta entre paréntesis en la relación (1) es menor que la unidad. Teniendo también en cuenta que $1/n! < 1/2^{n-1}$ para $n > 2$, resulta

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Apliquemos la fórmula para la suma de la progresión geométrica en la última expresión; entonces

$$x_n < 1 + \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

o sea, la sucesión está acotada superiormente.

Por lo tanto, queda demostrado que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es monótona creciente y está acotada. Según el teorema 3.12 ella tiene un límite finito. Este límite se llama *número* e. Por consiguiente, según la definición

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

El número e tiene gran importancia en muchas cuestiones de la teoría y la práctica. En este párrafo hemos dado sólo la definición del número e. En adelante expondremos el método para calcular este número con cualquier grado de precisión.

Aquí sólo señalaremos que puesto que $x_n < 3$ y de (1) es directamente evidente que $2 < x_n$, el número e está encerrado dentro de los

límites de $2 \leqslant e \leqslant 3$. Se puede demostrar también que e es un número irracional. En particular, este número es la base de los logaritmos naturales que desempeñan en la matemática un importante papel.

Los logaritmos naturales se designan $\ln x$ ($\ln x = \log_e x$). Vamos a establecer la relación entre los logaritmos de los números respecto a toda base $a > 0$ y los logaritmos naturales. Para esto hagamos uso de la identidad $x = a^{\log_a x}$ que se deduce de la definición del logaritmo. Logaritmemos ambos miembros de esta igualdad respecto a la base e; obtenemos

$$\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \ln a,$$

de donde

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \text{ o bien } \log_a x = M \ln x.$$

El número M se llama *módulo de paso*.

○ **Ejemplo 5.** Hállese $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Resolución. Hagamos uso del hecho de que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\lim_{n \to \infty} 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\right] = e \cdot [1 + 0] = e.$$

Ejemplo 6. Hállense los números enteros sucesivos entre los cuales se contiene la expresión $6\,(1 - 1{,}01^{-100})$.

Resolución. Representemos la expresión dada en la forma

$$6\,(1 - 1{,}01^{-100}) = 6\left[1 - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{-100}\right].$$

Utilicemos el hecho de que $2 < (1 + 1/n)^n < 3$. Entonces $1/2 > (1 + 1/n)^{-n} > 1/3$, $-1/2 < -(1 + 1/n)^{-n} < -1/3$. Adicionando a cada miembro de la desigualdad 1, encontramos $1/2 < 1 - (1 + 1/n)^{-n} < 2/3$. Suponiendo $n = 100$ y multiplicando término a término por 6, obtenemos finalmente

$$3 < 6\left[1 - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{-100}\right] < 4,$$

que es lo que se necesitaba hallar. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense las definiciones: a) de las sucesiones no creciente y creciente; b) de las sucesiones no decreciente y decreciente.

2. Cítese un ejemplo de una sucesión monótona.

3. Cítese un ejemplo de una sucesión monótona acotada (no acotada).

4. Demuéstrese el teorema de la convergencia de una sucesión monótona para el caso de una sucesión no creciente.

5. ¿El límite de qué sucesión lleva el nombre de número e?

§ 4. Teorema de los segmentos encajados

Vamos a terminar el estudio de la teoría de los límites con la demostración del teorema que más adelante se utilizará reiteradamente para demostrar otros teoremas importantes.

Supongamos que se da una sucesión de segmentos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, . . ., $[a_n, b_n]$, . . . tales que cada segmento siguiente se contiene en el precedente: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, o sea,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{para todos los números } n \qquad (1)$$

y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Llamémosla *sucesión de los segmentos encajados*. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 3.13. *Para toda sucesión de segmentos encajados existe un único punto c perteneciente a todos los segmentos de esta sucesión, o sea, tal que* $a_n \leqslant c \leqslant b_n$.

□ **Demostración.** De la desigualdad (1) se deduce que los extremos izquierdos de los segmentos forman una sucesión monótona no decreciente

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \qquad (2)$$

y los extremos derechos, una sucesión monótona no creciente

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots . \qquad (3)$$

En este caso la sucesión (2) está acotada superiormente y la sucesión (3) está acotada inferiormente, ya que $a_n \leqslant b_1$ y $b_n \geqslant a_1$ para todo número n. Por consiguiente, en virtud del teorema 3.12 estas sucesiones tienen límites. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''$. Entonces de la hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c'' - c' = 0$$

se desprende que $c' = c''$, o sea, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen un límite común. Designando este límite con c, obtenemos que para todo número n son válidas las desigualdades $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, o sea, el punto c pertenece a todos los segmentos de la sucesión (1).

Mostremos ahora que el punto c es único. Admitamos que exista un punto más c_1 ($c_1 \neq c$) perteneciente a todos los segmentos de la sucesión (1). Entonces para todo número n debe cumplirse la desigualdad $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c|$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geqslant |c_1 - c| \neq 0$ lo que contradice la hipótesis del teorema. ■

Observación. El teorema no es justo si en vez de los segmentos se consideran los intervalos. Por ejemplo, para la sucesión de los intervalos encajados

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/4) \supset \ldots \supset (0, 1/2^n) \supset \ldots \quad (4)$$

no existe un punto que pertenezca a todos los intervalos. En efecto, cualquiera que sea el punto c que se tome sobre el intervalo (0, 1), siempre habrá un número de orden N tal que para $n > N$ tenga lugar $1/2^n < c$ y el punto c no pertenecerá a los intervalos de la sucesión (4) comenzando por el intervalo $(0, 1/2^N)$. El punto nulo tampoco les pertenece, ya que es el extremo izquierdo común de todos los intervalos.

○ **Ejemplo 7.** Constrúyase una sucesión de los segmentos encajados con el punto $c = 1$ perteneciente a todos los segmentos.

Resolución. La sucesión buscada es la de los segmentos encajados [1/2, 1], [2/3, 1], [3/4, 1], [4/5, 1], ... $[n/(n+1), 1]$, ..., ya que los extremos izquierdos de los segmentos forman la sucesión $\{n/(n+1)\}$ cuyo límite para $n\to\infty$ es igual a 1 (véase el ejemplo 1 del § 2). ●

PREGUNTAS PARA ELAUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de los segmentos encajados.
2. Dese la interpretación geométrica de la sucesión de los segmentos encajados.
3. Cítese un ejemplo de una sucesión de los segmentos encajados que concurren al punto $c = 3$.

§ 5. Problemas de control

3.1. Una sucesión $\{x_n\}$ se asigna por los dos primeros elementos $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ y por la relación recurrente $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ para todo número $n \geqslant 1$ Determínese x_{90} y x_{885}.

3.2. Demuéstrese que la sucesión $\{3^{\sqrt{n}}\}$ es infinitamente grande.

3.3. Demuéstrese que la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n \cdot 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ es infinitamente pequeña.

3.4. Demuéstrese la segunda parte del teorema 3.1: si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, ($\alpha_n \neq 0$) entonces $\{x_n\} = \{1/\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente grande.

3.5. Muéstrese que la sucesión no acotada $\{n^{(-1)^n}\}$ no es infinitamente grande.

3.6. Demuéstrese que la sucesión $\{1 + 1/2 + \ldots + 1/2^n\}$ tiene por límite el número 2.

3.7. Demuéstrese que la sucesión $\{n/2^n\}$ tiene por límite el número 0.

3.8. Demuéstrese que $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0$.

3.9. Demuéstrese que si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

3.10. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande y la sucesión $\{y_n\}$ tiene un límite finito $a \neq 0$. ¿Qué se puede decir de la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$?

3.11. Cítense ejemplos de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de manera que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ y, además: 1) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \infty$; 2) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 1$; 4) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$ no exista.

3.12. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge y la sucesión $\{y_n\}$ tiene un límite finito $a \neq 0$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$?

3.13. Se sabe que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen. ¿Pueden o no las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ ser convergentes? ¿divergentes? Argumente las respuestas citando los ejemplos de las sucesiones $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$.

3.14. Hállese: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2-1}$; 3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n^2+n-1}$; 4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}\right)$; 5) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-n}{n^2+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)$.

3.15. Demuéstrese que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (a es todo número).

3.16. Hállese $\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}}$.

3.17. Hállese $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$.

3.18. Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n = \frac{2^n}{n!}$ converge y determine su límite.

3.19. Una sucesión $\{x_n\}$ se asigna por la relación recurrente $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. Demuéstrese que esta sucesión converge y hállese su límite.

4

FUNCIÓN

Pasando al estudio de la función nótese que el concepto de función es fundamental no sólo en el análisis matemático, donde se estudia especialmente, sino en todas las matemáticas en conjunto.

§ 1. Concepto de función

1. Definición de la función y conceptos fundamentales.

Definición 1. *Sean X e Y ciertos conjuntos numéricos. Se llama función f al conjunto de pares ordenados de números $(x; y)$* [1] *tales que $x \in X$, $y \in Y$ y cada x entra en un y sólo en un par de este conjunto, y cada y entra al menos en un par. En este caso se dice que al número x se le ha hecho corresponder el número y y se escribe $y = f(x)$. El número y se denomina valor de la función f en el punto x. La variable y se dice variable dependiente y la variable x, variable independiente (o argumento); el conjunto X se llama dominio de definición (o de existencia) de la función y el conjunto Y, conjunto de los valores de la función.*

En algunos manuales la función se entiende como una correspondencia determinada entre los elementos de dos conjuntos.

En este caso el concepto de correspondencia se introduce como primario, lo que provoca, naturalmente, ciertas dificultades en su aclaración [2] y, lo principal, en la comprensión exacta del mismo concepto de función. En cambio, la definición de función que se propone mediante el concepto de conjunto, en primer lugar carece de estas deficiencias y, en segundo lugar, responde al nivel moderno de la enseñanza de las matemáticas.

Además de la letra f, para designar las funciones, se utilizan otras letras del alfabeto latino y griego, por ejemploo $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$, etc. Con tras letras se designan las variables dependiente e independiente. A veces la función dependiente también se llama función.

Junto con el término «función» se usa el término equivalente «aplicación» y en vez de $y = f(x)$ se escribe $f: x \mapsto y$ y se dice que la *aplicación f transforma el número x en número y* o bien, lo que es lo mismo, el *número y es la imagen del número x cuando se aplica f.*

---

[1] Recuérdese que un par de números x e y se dice ordenado si se señala cuál de estos números se considera primero y cuál, segundo. Un par ordenado de números se escribe en la forma $(x; y)$, donde x es el primer número e y, el segundo.

[2] Pruebe, por ejemplo, explicar qué significa el término «correspondencia».

Durante los cálculos la notación $y = f(x)$ es de ordinario más cómoda que la notación $f: x \mapsto y$. Por ejemplo, siempre que se trate de transformaciones analíticas, es más cómodo utilizar la notación $f(x) = x^2$ que la notación $f: x \mapsto x^2$.

Supongamos que sobre cierto conjunto X está definida una función $f(x)$; entonces el valor de esta función, correspondiente a cierto valor del argumento x_0, se designará $f(x_0)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(3) = 3^2 = 9$, $f(-2) = (-2)^2 = 4$, etc.

La función, todos los valores de la cual son iguales entre sí se dice *constante*. La función constante suele designarse con la letra C ($f(x) = C$).

Se dice que la función $f(x)$, definida sobre cierto conjunto X, está acotada superiormente (inferiormente) sobre este conjunto, si existe un número M (m) tal que para todo $x \in X$ se cumpla la desigualdad $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$). La función acotada superior e inferiormente sobre el conjunto X se denomina *acotada sobre este conjunto*. La condición de que la función $f(x)$ esté acotada puede escribirse en la forma siguiente: existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$.

○ **Ejemplos.** 1) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ está acotada sobre toda la recta numérica, ya que $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ para cualquier x ($M = 1$); 2) la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada superiormente sobre el intervalo $(0, 1)$, ya que no existe un número M tal que para cualquier $x \in (0, 1)$ se cumpla la desigualdad $\frac{1}{x} \leqslant M$. ●

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida sobre cierto conjunto X y que Y es el conjunto de los valores de la misma y sea que ella está acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto X. Entonces el número M (m) y todo número mayor (menor) se llama *cota superior* (*inferior*) *del conjunto de los valores de la función* Y y el número mínimo (máximo) entre los que limitan el conjunto Y superiormente (inferiormente) se denomina *cota superior* (*inferior*) *exacta de la función sobre el conjunto* X, la cual se designa $\sup\limits_X f(x)$, ($\inf\limits_X f(x)$).

Si el conjunto Y no está acotado superiormente (inferiormente) se escribe $\sup\limits_X f(x) = +\infty$ ($\inf\limits_X f(x) = -\infty$). En este caso para todo número A existe un punto $x' \in X$ tal que $f(x') > A$ ($f(x') < A$).

○ **Ejemplo.** La función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ en el intervalo $X = [0, +\infty)$ tiene la cota inferior exacta $m = 0$ y la cota superior exacta $M = 1$. Efectivamente, la función está acotada sobre este intervalo, ya que para cualquier $x \in [0, +\infty)$ se cumplen las desigualdades $0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$ ($m = 0$, $M = 1$). Así pues, m y M son, respectivamen-

te, las cotas inferior y superior del conjunto de los valores de la función $Y = [0, 1)$. Además, puesto que $f(x) \geqslant 0$, entonces $m = 0$ es la cota inferior exacta del conjunto de los valores de la función. Para demostrar que $M = 1$ es la cota superior exacta de la función $f(x)$ hagamos uso de la propiedad de la cota superior exacta: para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $x \in [0, +\infty)$ tal que $\frac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon$ o bien $x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, o sea, para x que satisface la última desigualdad se cumple la desigualdad $f(x) > 1 - \varepsilon$ y esto demuestra precisamente que $M = 1$ es la cota superior exacta de la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ o bien, en las designaciones adoptadas, $1 = \sup\limits_{[0, +\infty]} \frac{x}{1+x}$ y $0 = \inf\limits_{[0, +\infty]} \frac{x}{1+x}$. Nótese que la cota superior exacta $M = 1$ no pertenece al conjunto de los valores de la función Y; en cambio, la cota exacta inferior $m = 0$ pertenece a Y. ●

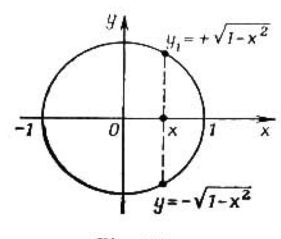


Fig. 77

Con las funciones pueden realizarse distintas operaciones aritméticas. Si se dan dos funciones f y g definidas sobre el mismo conjunto X y C es cierto número, la función $C \cdot f(x)$ se define como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $C \cdot f(x)$; la función $f \pm g$, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) \pm g(x)$; $f \cdot g$, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) \cdot g(x)$; f/g, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x)/g(x)$ (para $g(x) \neq 0$).

Sobre el plano la función se representa en forma de una gráfica, o sea, en forma de un conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas están ligadas por la relación $y = f(x)$ llamada *ecuación de la gráfica.*

La gráfica de una función puede representar cierta línea «continua» (curva o recta) y puede componerse de puntos aislados, por ejemplo, el gráfico de la función $y = n!$ (fig. 79).

Nótese que no toda línea es una gráfica de cualquier función. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es una gráfica de la función, ya que cada $x \in (-1, 1)$ entra no en un par sino en dos pares de números $(x; y)$ de este conjunto teniendo distintos valores de y: $y_1 = +\sqrt{1 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, lo que contradice la exigencia de univocidad en la definición de la función (fig. 77). Sin embargo, la parte de la circunferencia que está en el semiplano inferior es una gráfica de la función $y = -\sqrt{1 - x^2}$ y la otra parte de la circunferencia, situada en el semiplano superior, es una gráfica de la función $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

2. Método de representación de las funciones. Representar la función f quiere decir que es necesario indicar cómo para cada valor del argumento x se encuentra el valor correspondiente de la función $f(x)$. Existen tres métodos principales de representar las funciones: *analítico*, *tabular* y *gráfico*.

1) **Método analítico.** Este método consiste en que la dependencia existente entre las variables se determina con ayuda de una fórmula que muestra qué operaciones y en qué orden han de cumplirse para

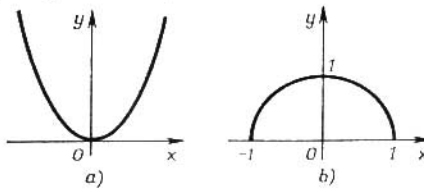


Fig. 78

obtener el valor de la función que corresponde al valor dado del argumento. Consideremos algunos ejemplos.

○ **1.** La fórmula $y = x^2$ representa la función cuyo dominio de definición es la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y cuyo conjunto de los valores es la semirrecta $[0, +\infty)$ (fig. 78, *a*).

2. La fórmula $y = \sqrt{1 - x^2}$ asigna la función cuyo dominio de definición es el segmento $[-1, 1]$ y cuyo conjunto de los valores es el segmento $[0, 1]$ (fig. 78, *b*).

3. La fórmula $y = n!$ hace corresponder a cada número natural (o sea, a cada número positivo entero) n el número $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces $y = 3! = 6$. Por lo tanto, la fórmula $y = n!$ representa la función cuyo dominio de definición es $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ y cuyo conjunto de los valores es $\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$ (fig. 79).

4.
$$y = \operatorname{sgn} x\,^{1)} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función dada está asignada con ayuda de varias fórmulas. Está definida sobre toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y el conjunto de sus valores se compone de tres números: -1, 0 y $+1$ (fig. 80).

5. La fórmula de Dirichlet [2] es

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

---

[1] El término sgn procede del lat. *signum*, o sea, signo.

[2] P.G. Dirichlet (1805—1859), matemático alemán.

Esta función está definida sobre toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y el conjunto de sus valores se compone de dos números: 0 y 1. ●

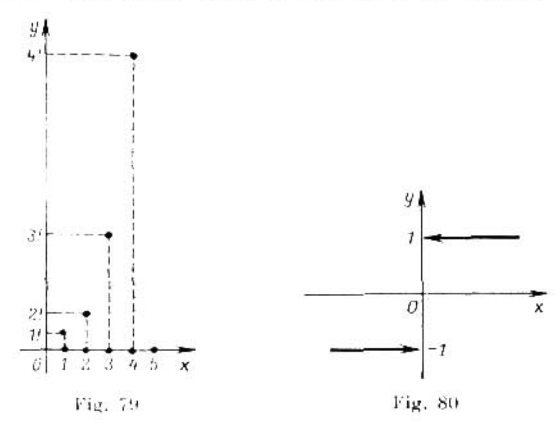


Fig. 79 Fig. 80

Nótese que la función de Dirichlet no puede ser representada gráficamente.

2) **Método tabular.** Representemos la tabla siguiente:

x	0	0,1	0,2	3	0,6	4	0,8	1,5	2
y	−1	10	1	−2	−8	0,5	−2	5	7

Hagamos corresponder a cada x escrito en la primera fila de la tabla el número y que está debajo de este número x en la segunda fila y diremos que la función obtenida está asignada por la tabla. El dominio de definición de la función dada es el conjunto que se compone de nueve números x indicados en la primera fila de la tabla y el conjunto de sus valores es el conjunto que se compone de nueve números y escritos en su segunda fila.

Con ayuda de la tabla se puede asignar la función sólo si el número de valores del argumento es finito.

El método tabular se usa con frecuencia para representar las funciones. Así, son bien conocidas, por ejemplo, las tablas de las funciones trigonométricas, las tablas de los logaritmos y otras. De ejemplo del método tabular de representar una función sirve el horario del movimiento de un tren que determina el lugar donde se encuentra éste en diferentes instantes de tiempo.

3) **Método gráfico.** El método gráfico de representar una función suele utilizarse en la práctica de mediciones físicas, cuando la correspondencia entre las variables x e y se asigna con ayuda de una gráfica. Tal operación se llama de ordinario «lectura» de los valores de la gráfica. En muchos casos las gráficas son trazadas por aparatos autorregistradores. Por ejemplo, para medir la presión atmosférica a diferentes altitudes se usa un aparato autorregistrador especial llamado barógrafo, que traza una curva sobre una cinta en movimiento que indica la variación de la presión en función de la altitud.

Existen también otros procedimientos de representar funciones, por ejemplo, al realizar los cálculos en un ordenador las funciones se asignan con ayuda de **programas.**

3. Conceptos de funciones compuesta e inversa.

Definición 2. *Si sobre cierto conjunto X está definida la función $z = \varphi(x)$ con un conjunto de los valores Z y sobre el conjunto Z está definida la función $y = f(z)$, entonces la función $y = f[\varphi(x)]$ se llama función compuesta de x [o superposición (a veces composición) de las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$] y la variable z, variable intermedia de la función compuesta.*

○ **Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sen} x^2$ es una función compuesta definida sobre toda la recta numérica, ya que $y = f(z) = \operatorname{sen} z$, $z = \varphi(x) = x^2$. ●

Definición 3. *Sean X e Y ciertos conjuntos y supongamos que se da la función f, o sea, el conjunto de los pares de números $(x; y)$ $(x \in X$, $y \in Y)$ en el cual cada número x entra en un y sólo un par y cada número y entra, al menos, en un par. Si en cada par de este conjunto los números x e y se cambian de lugar, obtenemos un conjunto de pares de los números $(y; x)$, el cual se llama función inversa φ a la función f.*

Designaremos la función inversa con el símbolo $x = \varphi(y)$.

Hablando en general, la función inversa no es una función, ya que cada número y puede formar parte no sólo de un par sino también de varios pares. Así, por ejemplo, para la función $y = x$ la función inversa $x = y$ es unívoca (cada número y entra en un par), para la función $y = x^2$ la función inversa $x = \pm\sqrt{y}$ es bivalente (cada número y entra en dos pares) y la función $x = \operatorname{Arcsen} y$ para la función $y = \operatorname{sen} x$ es multívoca (cada número y forma parte de un número infinito de pares). Geométricamente el hecho dado es evidente.

De la definición se deduce que si la función inversa es unívoca, o sea, es una función en el sentido ordinario, el conjunto de los valores Y de la función f sirve de dominio de definición de la función inversa φ y el dominio de definición X de la función f sirve de conjunto de los valores de la función inversa φ. Supongamos, por ejemplo, que la función $y = f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, el segmento $[\alpha, \beta]$ es el conjunto de los valores de la misma y cada $y \in [\alpha, \beta]$ corresponde exactamente a un número x de $[a, b]$. Enton-

ces, por definición, sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ está definida la función inversa unívoca $x = \varphi(y)$ y de conjunto de sus valores sirve el segmento $[a, b]$ (fig. 81). De esta manera, la función $y = f(x)$ y la función inversa $x = \varphi(y)$ tienen la misma gráfica. Por ejemplo, la función $y = 5x$ y la función inversa $x = 1/5y$ se representan gráficamente por la misma recta.

Si los ejes Ox y Oy se cambian de lugar para lo cual es necesario girar en el espacio el plano Oxy alrededor de la bisectriz del cuadrante I en 180°, la nueva posición de la gráfica de la función inversa $x = \varphi(y)$ es la gráfica de la función $y = \varphi(x)$ (fig. 81).

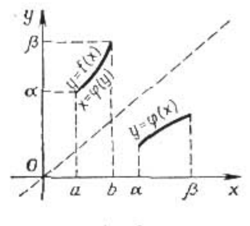


Fig. 81

Más adelante continuaremos considerando las funciones compuesta e inversa.

4. Clasificación de las funciones. La función constante $f(x) = C, C = \text{const}$, la función potencial x^α (α es todo número), la función exponencial a^x $(0 < a \neq 1)$, la función logarítmica $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ y las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ se llaman *funciones elementales más simples* [1]).

Estas funciones desempeñan un importante papel para aclarar los conceptos fundamentales del análisis y constituyen la base para el estudio de funciones más complicadas.

Todas las funciones que se obtienen con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas con las funciones elementales más simples, así como por la superposición de estas funciones constituyen la *clase de funciones elementales.* De ejemplos de funciones elementales sirven $f(x) = |x|$ $(|x| = \sqrt{x^2})$; $f(x) = \log^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} 3x$; $f(x) = \ln |\operatorname{sen} 3x| - e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$, etc.

Tiene lugar la siguiente clasificación de las funciones elementales:

1) La función de la forma

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

donde $m \geqslant 0$ *es un número entero y* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *son cualesquiera* números, o sea, coeficientes $(a_0 \neq 0)$, se llama *función racional entera o polinomio de grado m.* El polinomio de primer grado se denomina también *función lineal.*

2) La función que es una relación de dos funciones racionales enteras

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

se llama *función racional fraccional.*

---

[1]) Se supone que el lector tenga una noción de las funciones elementales más simples al menos en el marco de la matemática elemental.

El conjunto de las funciones racionales y racionales fraccionales forma la *clase de funciones racionales*.

3) La función que está obtenida con ayuda de un número finito de superposiciones y cuatro operaciones aritméticas sobre las funcio-

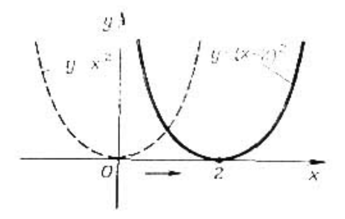


Fig. 82

Fig. 83

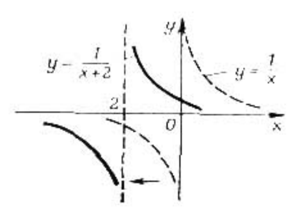


Fig. 84.

nes potenciales, tanto con exponentes enteros como con fraccionarios y que no es racional, se llama *irracional*.

Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}} - (\sqrt[5]{x}+x)^3$, etc., son funciones irracionales.

4) Toda función que no sea racional o irracional se denomina función *trascendente*. Tales, por ejemplo, son las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \operatorname{sen} x + x$, etc.

5. Construcción de las gráficas de funciones. Proponemos el siguiente método de construcción de las gráficas de funciones, que se basa en el empleo de algunas reglas de construcción valiéndose de las gráficas de funciones ya conocidas.

Supongamos que se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Construyamos la gráfica de la función $y = f(x - a)$. Esta gráfica puede ser obtenida del modo siguiente: partiendo del punto arbitrario x, en el que la ordenada $f(x)$ se conoce, determinaremos el punto x_1 en el cual la *ordenada* $f(x_1 - a)$ *tiene el mismo valor*, o sea, se cumple

la igualdad

$$f(x_1 - a) = f(x).$$

Para que se cumpla esta igualdad basta, evidentemente, que se cumpla la igualdad

$$x_1 - a = x,$$

de donde encontramos $x_1 = x + a$ [1].

Regla 1. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x - a)$ a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ es necesario la gráfica de*

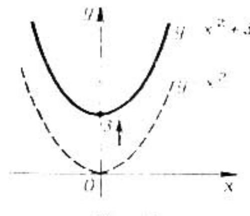


Fig. 85.

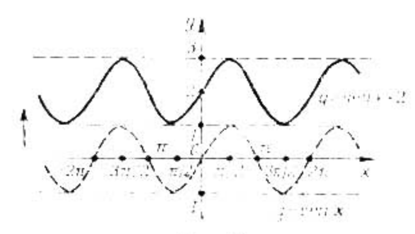


Fig. 86

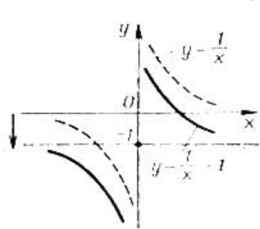


Fig. 87

la función $y = f(x)$ desplazarla a lo largo del eje Ox en a ***a la derecha,*** *si $a > 0$, o bien en* ***$|a|$ a la izquierda****, si $a < 0$.*

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la regla 1, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = (x - 2)^2$. **2.** $y = \log_{1/2}(x - 2)$. **3.** $y = \frac{1}{x+2}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 82, 83 y 84, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = (x + 2)^2$. **2.** $y = \log_{1/2}(x + 2)$. **3.** $y = 3^{x+2}$. **4.** $y = \frac{1}{x-2}$. **5.** $y = \frac{1}{x+1}$. **6.** $y = \sqrt{x+1}$. **7.** $y = \sqrt{x-1}$. **8.** $y = \log_2(x - 2)$. **9.** $y = \log_2(x + 2)$. **10.** $y = \cos(x + \pi/6)$. **11.** $y = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$. **12.** $y = \arccos(x - 2)$. **13.** $y = \operatorname{arcctg}(x - 1/4)$.

[1] En efecto, si $x_1 = x + a$, entonces $f(x_1 - a) = f(x + a - a) = f(x)$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Vamos a construir la gráfica de la función $y = f(x) + c$.

Regla 2. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x) + c$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario desplazar la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje Oy hacia arriba en c, si $c > 0$, o bien en $|c|$ hacia abajo, si $c < 0$.*

○ **Ejemplo 2.** Utilizando la regla 2, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = x^2 + 3$. **2.** $y = \operatorname{sen} x + 2$; $y = \frac{1}{x} - 1$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 85, 86 y 87, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = x^2 - 3$. **2.** $y = \operatorname{sen} x - 2$. **3.** $y = \frac{1}{x} + 1$. **4.** $y = \sqrt{x} + 1$. **5.** $y = 3^x - 1$. **6.** $y = \log_{1/2} x + 1$. **7.** $y = \sqrt[3]{x} + 1$. **8.** $y = \operatorname{arctg} x + 1$. **9.** $y = (1/2)^x + 1$.

Se da la gráfica $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = -f(x)$.

Regla 3. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = -f(x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario en la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ cambiar el signo por el opuesto. Así pues, la gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ mediante la reflexión directa respecto al eje Ox.*

○ **Ejemplo 3.** *Utilizando la regla 3, constrúyanse las gráficas de las funciones:* **1.** $y = -x^2$. **2.** $y = -\cos x$. **3.** $y = -\sqrt{x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 88, 89 y 90, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = -x^3$. **2.** $y = -\sqrt[3]{x}$. **3.** $y = -\frac{1}{x}$. **4.** $y = -3^x$. **5.** $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **6.** $y = -\log_3 x$. **7.** $y = -\operatorname{sen} x$. **8.** $y = -\operatorname{tg} x$. **9.** $y = -\operatorname{arcctg} x$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(-x)$.

Regla 4. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = f(-x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor x por -1. Así pues, la gráfica de la función $y = f(-x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ mediante la reflexión directa respecto al eje Oy.*

○ **Ejemplo 4.** Utilizando la regla 4, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \sqrt{-x}$. **2.** $y = \log_2(-x)$. **3.** $y = 3^{-x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 91, 92 y 93, respectivamente. ●

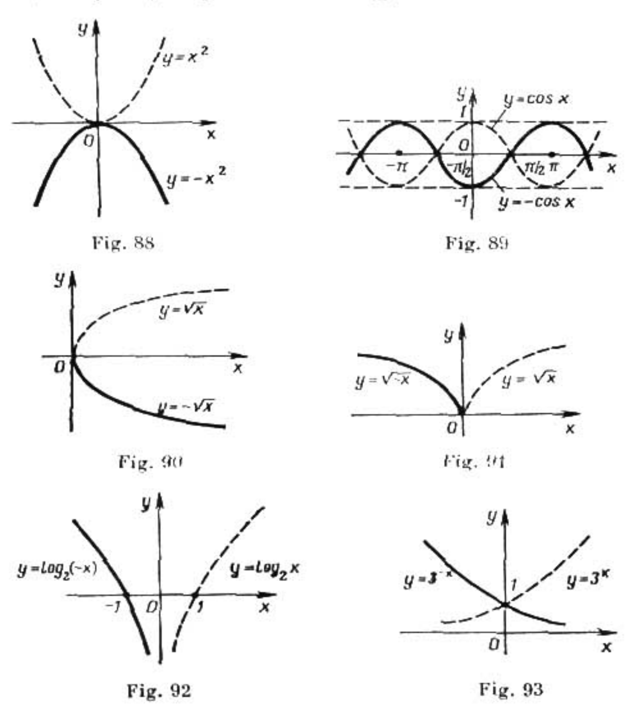


Fig. 88 Fig. 89

Fig. 90 Fig. 91

Fig. 92 Fig. 93

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \log_{1/2}(-x)$. **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. **3.** $y = \sqrt[3]{-x}$. **4.** $y = \arcsen(-x)$. **5.** $y = \operatorname{arcctg}(-x)$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = kf(x)$.

Regla 5. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = kf(x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor de la ordenada $f(x)$ por el número k.*

En este caso debido a la multiplicación de todos los valores de la función $f(x)$ por $k > 1$ las ordenadas de la gráfica de la función

aumentan k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ «se estira» a partir del eje Ox k veces, mientras que debido a la multiplicación por k para $0 < k < 1$ las ordenadas de la gráfica de la función disminuyen k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ «se contrae» k veces hacia el eje Ox.

○ **Ejemplo 5.** Utilizando la regla 5, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2x^2$. **2.** $y = 2$ sen x. **3.** $y = 1/2\sqrt{x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las *figs.* 94, 95 y 96, *respectivamente.*

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y=\frac{1}{2}x^2$. **2.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$. **3.** $y=2\sqrt{x}$. **4.** $y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. **5.** $y=\frac{3}{x}$. **6.** $y=\frac{1}{2}\log_{1/2} x$. **7.** $y=2\cdot 2^x$. **8.** $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x$. **9.** $y=\frac{1}{2}\arccos x$. **10.** $y=2\operatorname{arctg} x$. **11.** $y=2\log_{1/2} x$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(kx)$. Partiendo de un punto arbitrario x en el cual se conoce la ordenada $f(x)$ encontraremos el punto x_1 en el cual la gráfica de la función $y = f(kx_1)$ tiene la misma ordenada, o sea, se cumple la igualdad

$$f(x) = f(kx_1).$$

Para que esta igualdad se cumpla [1]) es, evidentemente, suficiente el cumplimiento de la igualdad $x = kx_1$, de donde encontramos $x_1 = \frac{1}{k}x$.

Regla 6. *Para construir la gráfica $y = f(kx)$ basta dividir el valor de x por el número k.*

En este caso debido a la división de todos los valores del argumento de la función $y = f(x)$ por $k > 1$ la gráfica de la función «se contrae» hacia el eje Oy $1/k$ veces y debido a la división por k para $0 < k < 1$ la gráfica de la función «se estira» a partir del eje Oy $1/k$ veces.

○ **Ejemplo 6.** Utilizando la regla 6, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y =$ sen $2x$. **2.** $y =$ arcsen $2x$. **3.** $y = \sqrt{(1/2)\,x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 97, 98 y 99, respectivamente.

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \operatorname{sen}(x/2)$. **2.** $y = \operatorname{arcsen}(x/2)$. **3.** $y = \sqrt{2x}$. **4.** $y = \sqrt[3]{8x}$. **5.** $y = 5^{x/2}$. **6.** $y = (0{,}5)^{3x}$. **7.** $y = \log_{1/3} 2x$. **8.** $y = \cos(x/2)$. **9.** $y = \operatorname{tg} 2x$. **10.** $y = \arccos 3x$.

Antes de enunciar la siguiente regla construyamos la gráfica de la *función, empleando sucesivamente varias reglas.*

---

[1]) Compruebe este hecho.

○ **Ejemplo 7.** Constrúyase la gráfica de la función $y = 2x^2 - 8x + 5$.

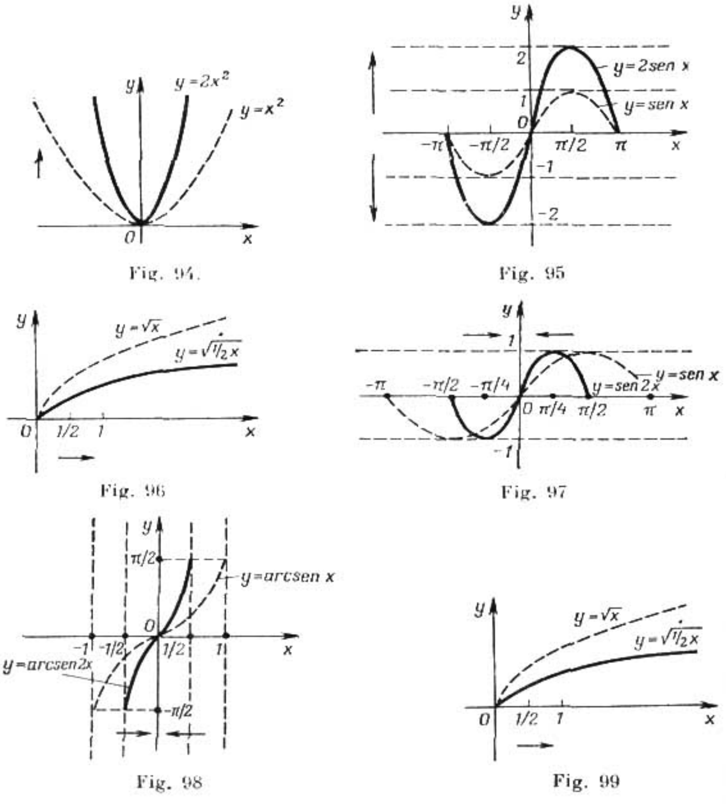


Fig. 94.

Fig. 95

Fig. 96

Fig. 97

Fig. 98

Fig. 99

Separando el cuadrado perfecto, transformemos el trinomio de segundo grado reduciéndolo a la forma

$$y = 2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left[(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right] = 2(x-2)^2 - 3$$

y cumpliremos la construcción en la forma siguiente: 1) consideramos conocida la gráfica de la función $y = x^2$; 2) según la regla 5 construi-

mos la gráfica de la función $y = 2x^2$; 3) según la regla 1 construimos la gráfica de la función $y = 2(x-2)^2$; 4) según la regla 2 construimos la gráfica de la función buscada $y = 2(x-2)^2 - 3$ (fig. 100).

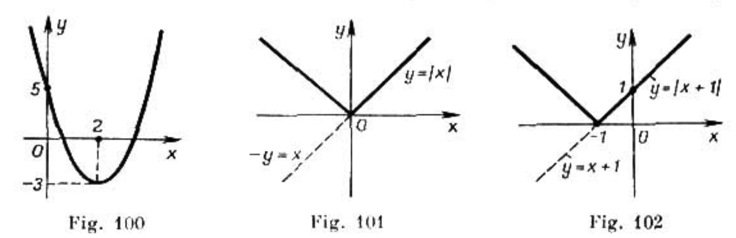


Fig. 100 Fig. 101 Fig. 102

Hemos obtenido la gráfica de la parábola $y = 2x^2$ desplazado 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. De un modo análogo se construye la gráfica de todo trinomio de segundo grado. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2(x-5)^2 - 1$. **2.** $y = -2-(1/2)(x+3)^2$. **3.** $y = x^2 - 4x + 1$. **4.** $y = 3x - x^2$. **5.** $y = 4 - 2x^2 - 2x$. **6.** $y = 4x - x^2 - 3$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyanse la gráfica de la función $y = |f(x)|$. Tenemos

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0^{1)}. \end{cases}$$

Regla 7. *Para obtener la gráfica de la función $y = |f(x)|$ a partir de la función $y = f(x)$ es necesario dejar sin cambios los trozos de la gráfica $y = f(x)$ que están por encima del eje Ox y reflejar en forma especular respecto al eje Ox los trozos inferiores a este eje.*

○ **Ejemplo 8.** Utilizando la regla 7, constrúyase la gráfica de la función $y = |x|$.

Construimos la gráfica de la función $y = x$ (fig. 101). Luego, dejamos sin variar el trozo de la gráfica $y = x$ que está situado por encima del eje Ox (para $x \geqslant 0$) y reflejamos en forma especular respecto al eje Ox el trozo inferior a este eje (para $x < 0$); como resultado obtenemos la gráfica de la función $y = |x|$.

Ejemplo 9. Constrúyase la gráfica de la función $y = |x+1|$.

Construimos la gráfica de la función $y = x + 1$ (fig. 102). Luego dejamos sin variar el trozo de la gráfica $y = x + 1$ que está situado por encima del eje Ox (para $x \geqslant -1$) y reflejamos en forma especular

[1] Por desgracia, a veces se escribe una igualdad incorrecta

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

respecto al eje Ox el trozo inferior a este eje (para $x < -1$); como resultado obtenemos la gráfica de la función $y = |x+1|$. Se podría obtener esta misma gráfica construyendo primero la gráfica de la función $y = |x|$ y aplicando luego la regla 1.

Ejemplo 10. Constrúyase la gráfica de la función $y = |1 - |x||$.

Realicemos la construcción en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y = |x|$ (véase la fig. 101); 2) construimos la gráfica $y = -|x|$ (según la regla 3); 3) construimos la gráfica $y = 1 - |x|$ (según la regla 2); 4) construimos la gráfica de la función buscada $y = |1 - |x||$ (según la regla 7). La gráfica de la función $y = |1 - |x||$ está construida en la fig. 103. ●

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(|x|)$. Puesto que $f(|-x|) = f(|x|)$, la función $y = f(|x|)$ es par, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje Oy. Además, para $x \geqslant 0$ $f(|x|) = f(x)$.

Regla 8. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(|x|)$ a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ es necesario construir la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \geqslant 0$ y reflejarla en forma especular respecto al eje Oy.*

○ **Ejemplo 11.** Utilizando la regla 8, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \sqrt{|x|}$. **2.** $y = \log_3 |x|$. **3.** $y = \operatorname{sen} |x|$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 104, 105 y 106, respectivamente. ●

A veces las reglas 7 y 8 han de emplearse simultáneamente, o sea, deben construirse las gráficas de las funciones que tienen la forma $y = |f(|x|)|$.

○ **Ejemplo 12.** Constrúyase la gráfica de la función $y = |2x^2 - 8|x| + 5|$.

La gráfica de la función $y = 2x^2 - 8x + 5$ ya ha sido construida (véase la fig. 100). Notando que $x^2 = |x|^2$, construimos la gráfica de la función $y = 2x^2 - 8|x| + 5$ según la regla 8. Construimos una parte de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ para $x \geqslant 0$ y la reflejamos en forma especular respecto al eje Oy (fig. 107). Según la regla 7 construimos la gráfica del módulo (fig. 108). ●

En los ejemplos siguientes construiremos las gráficas utilizando diferentes reglas sin indicar qué reglas concretamente.

○ **E emplo 13.** Constrúyase la gráfica de la función $y = \left|\frac{x+5}{x+3}\right|$.

Separando la parte entera, reduzcamos la función lineal fraccional dada a la forma $y = \left|1 + \frac{2}{x+3}\right|$ y construyamos la gráfica en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$; 2) construimos la gráfica $y = \frac{1}{x+3}$;

3) construimos la gráfica $y=\frac{2}{x+3}$; 4) construimos la gráfica $y=1+\frac{2}{x+3}$; 5) construimos la gráfica $y=\left|1+\frac{2}{x+3}\right|$ (fig. 109).

Nótese que las gráficas intermedias pueden construirse tanto en una sola figura como en distintas. En el caso dado conviene cumplir

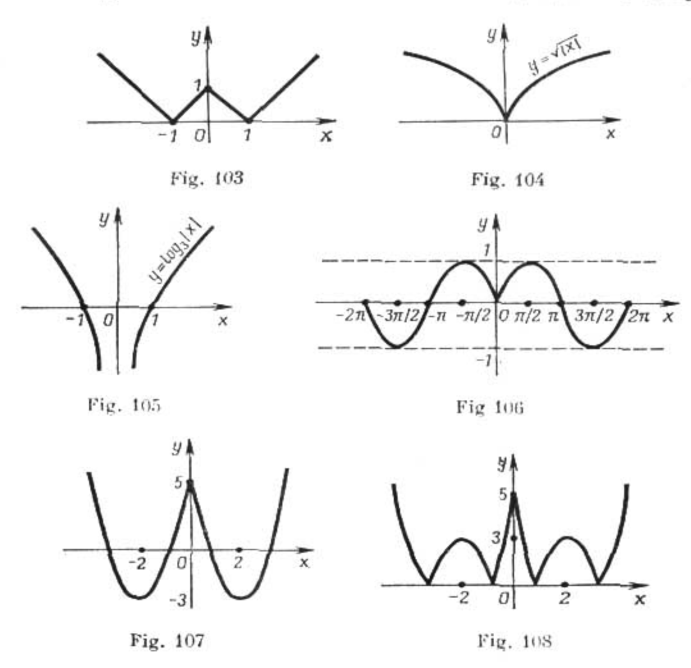


Fig. 103

Fig. 104

Fig. 105

Fig. 106

Fig. 107

Fig. 108

esto, para mayor evidencia, en diferentes figuras (haga esto por sí mismo).

Ejemplo 14. Constrúyase la gráfica de la función $y=(1/4)^{3x-1}+1$.

Representemos la función en la forma $y=(1/4)^{3x-1}+1=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+1$ y realicemos la construcción en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y=(1/4)^{x}$; 2) construimos la gráfica $y=(1/4)^{3x}$; 3) construimos

la gráfica $y=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$; 4) construimos la gráfica $y=$ $=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+1$ (fig. 110).

Ejemplo 15. Constrúyase la gráfica de la función $y=$ $=-\operatorname{arctg}(4x-1)$.

Representemos la función en la forma $y=-\operatorname{arctg}(4x-1)=$ $=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ y construyamos su gráfica en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función

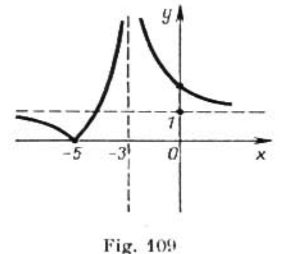


Fig. 109

Fig. 110

$y=\operatorname{arctg}x$; 2) construimos la gráfica $y=\operatorname{arctg}4x$; 3) construimos la gráfica $y=\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$; 4) construimos la gráfica $y=$ $=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ (fig. 111). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y=1+\frac{1}{x+2}$. **2.** $y=\frac{1}{x+3}-1$. **3.** $y=\frac{4x+7}{2x-5}$. **4.** $y=\left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$. **5.** $y=3^{x-2}$. **6.** $y=(0{,}25)^{x+3}$. **7.** $y=-2^{2x-1}$. **8.** $y=$ $=-(0{,}5)^{x+1}+1$. **9.** $y=2^{x+2}$. **10.** $y=-\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{3}$. **11.** $y=$ $=2\operatorname{arctg}(2x-1)$. **12.** $y=3\operatorname{arcctg}(3x+1)$. **13.** $y=2\arccos\frac{1-x}{2}$. **14.** $y=-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{2}$.

Consideremos ahora las reglas de adición, multiplicación y división de las gráficas.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1=f(x)$ e $y_2=g(x)$. Constrúyase la gráfica de las funciones $y=f(x)+g(x)$ [1].

---

[1]) La diferencia siempre puede reducirse a la suma: $y=f(x)-g(x)=$ $=f(x)+[-g(x)]$.

Regla 9. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 es necesario adicionar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2.*

○ **Ejemplo 16.** Utilizando la regla 9, constrúyase la gráfica de la función $y = x + \operatorname{sen} x$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica. Obtenemos su gráfica mediante la adición gráfica de los valores correspondientes de las ordenadas y_1 e y_2; $y = y_1 + y_2$.

Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$ (líneas de trazos en la fig. 112). En los puntos $x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$

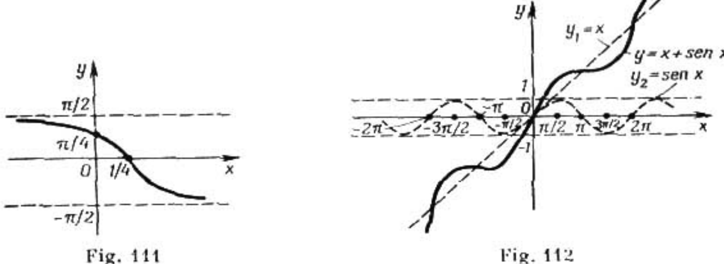


Fig. 111 Fig. 112

tenemos $y_2 = 0$, $y_1 = x$ e $y = y_1 + 0 = x$, o sea, en estos puntos la gráfica de la función pasa por la recta $y_1 = x$. En los puntos $x = \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; \ldots$ tenemos $y_2 = \pm 1$, $y_1 = x$ e $y = x \pm 1$, o sea, en ellos adicionamos $+1$ (respectivamente -1) a la ordenada $y_1 = x$. Marcando los puntos hallados y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica de la función buscada (línea continua en la fig. 112). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:
1. $y = |x| + x$. **2.** $y = 3^x + 3^{-x}$. **3.** $y = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$. **4.** $y = x^2 + \frac{1}{x}$. **5.** $y = |x| + \frac{1}{x}$. **6.** $y = x + \cos x$.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(x)\cdot g(x)$.

Regla 10. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x)\cdot g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 es necesario multiplicar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2.*

○ **Ejemplo 17.** Utilizando la regla 10, constrúyase la gráfica de la función $y = x\cdot \operatorname{sen} x$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica. Puesto que las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$ son impares, entonces la fun-

ción y, como producto de las funciones impares, es par; por lo tanto, vamos a realizar la construcción para $x \geqslant 0$.

Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = \text{sen}\, x$. Obtenemos la gráfica de la función y mediante la multiplicación de las ordenadas respectivas y_1 e y_2: $y = y_1 \cdot y_2$. En los puntos $x = \pi;\ 2\pi;\ \ldots$ tenemos $y_2 = 0$ e $y = y_1 \cdot y_2 = 0$ y en los puntos $x = \pi/2;\ 3\pi/2;\ \ldots\ y_2 = \pm 1$ e $y = y_1 \cdot (\pm 1) = \pm x$, o sea, los

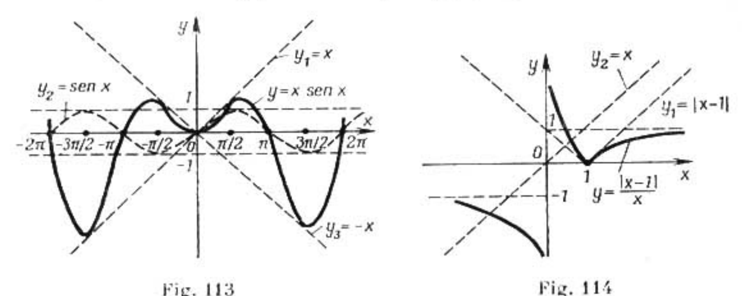


Fig. 113 Fig. 114

puntos correspondientes de la gráfica de la función y están sobre las rectas $y_1 = x$ e $y_2 = -x$ y la gráfica «oscila» entre estas rectas para $x \to +\infty$. Ahora bien, para construir la gráfica dada es conveniente construir la gráfica de la función auxiliar $y_3 = -x$.

Para $x \to 0+$ (o sea, a la derecha) las funciones sen x y x son equivalentes (sen $x \sim x$) (véase el § 6), por eso $y = y_1 \cdot y_2 = x \cdot x = x^2$. Construyendo la parte de la gráfica para $x \geqslant 0$ y reflejándola respecto al eje Oy, obtenemos la gráfica buscada (fig. 113). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:
1. $y = |x|\ \text{sen}\, x$. **2.** $y = x \cdot |x|$. **3.** $y = x\,|\text{sen}\, x|$.
4. $y = x\,(x^2 - 1)$.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Regla 11. *Para obtener la gráfica de la función* $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a partir de las gráficas de las funciones* y_1 *e* y_2 *es necesario dividir los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones* y_1 *e* y_2 *en los puntos donde* $y_2 \neq 0$.

○ **Ejemplo 18.** Utilizando la regla 11, constrúyase la gráfica de la función $y = \dfrac{|x-1|}{x}$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x = 0$. Construimos las gráficas de las funciones

$y_1 = |x-1|$ e $y_2 = x$ (fig. 114). *Obtenemos la gráfica de la función* y dividiendo los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 en todos los puntos, salvo $x = 0$.

De la figura se ve que para $x \to 0-$ (o sea, a la izquierda) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ e $y = y_1/y_2 \to -\infty$ y para $x \to 0+$ (o sea, a la derecha) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ e $y = y_1/y_2 \to +\infty$. Ahora bien, la recta $x = 0$ es la asíntota de la gráfica de la función y. La definición de la asíntota *se ha dado en el cap. 5, § 15, subp. 5.*

En el punto $x = 1$ tenemos $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ e $y = y_1/y_2 = 0$.

Para $x \to +\infty$ obtenemos $y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \to 1$, por eso la recta $y = 1$ es la asíntota de la rama derecha de la gráfica de la función y y para $x \to -\infty$ tenemos $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \to -1$, por eso la recta $y = -1$ es la asíntota de la rama izquierda de la gráfica de la función y. Representaremos las asíntotas mediante una línea de trazos.

De esta manera, la gráfica de la función buscada se compone de dos ramas representadas en la fig. 114 por una línea continua.

La gráfica de la función dada puede ser construida también por otro método. La función $y = \frac{|x-1|}{x}$ puede definirse por dos fórmulas:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{para } x-1 \geqslant 0, \\ -\dfrac{(x-1)}{x} & \text{para } x-1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{para } x \geqslant 1, \\ \dfrac{1-x}{x} & \text{para } x < 1. \end{cases}$$

Construyendo por separado *las funciones lineales fraccionales* $y = \frac{1-x}{x}$ e $y = \frac{x-1}{x}$ y *conservando sólo aquellas sus partes que corresponden a los intervalos indicados, obtenemos la gráfica buscada.* (Haga esto por sí mismo.) ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \frac{x}{|x-1|}$. **2.** $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$. **3.** $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$. **4.** $y = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}$. **5.** $y = \frac{1}{3^x+3^{-x}}$. **6.** $y = \frac{1}{4^{3x-1}+2}$.

(**Indicación** para los ejercicios de 4 a 6: desígnese el denominador por $y_1(x)$, constrúyase primero la gráfica de la función $y_1(x)$ y luego *la de la función* $y = \frac{1}{y_1(x)}$.)

Nos queda considerar la regla de construcción de las gráficas de las funciones compuestas. El concepto de función compuesta está introducido en el subp. 3.

Se da la gráfica de la función $u = \varphi(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f[\varphi(x)]$.

Regla 12. *Para construir la gráfica de la función $y = f[\varphi(x)]$ es necesario primero construir la gráfica de la función $u = \varphi(x)$ y luego, conociendo las propiedades de la función $y = f(u)$, construir la gráfica de la función compuesta $y = f[\varphi(x)]$.*

○ **Ejemplo 19.** Utilizando la regla 12, vamos a construir la gráfica de la función $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x = -1$. Primero construimos la gráfica

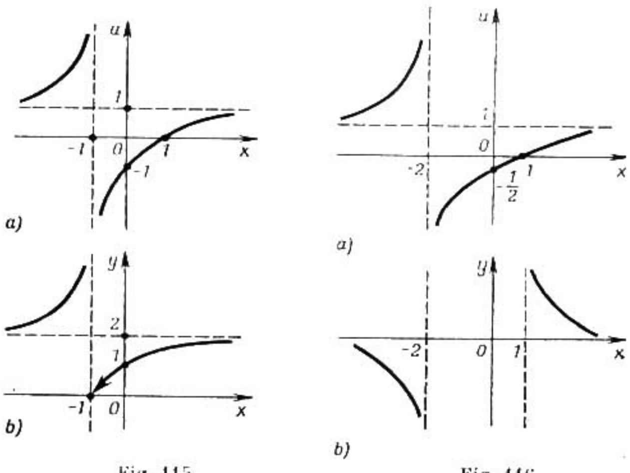


Fig. 115 Fig. 116

de la función $u = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ (fig. 115, *a*) y luego, utilizando las propiedades de la función exponencial, construimos la gráfica de la función $y = 2^u = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Si $x \to -1-$, entonces $u \to +\infty$, $y = 2^u \to +\infty$.
Si $x \to -1+$, entonces $u \to -\infty$, $y = 2^u \to 0$.
Si $x \to -\infty$, entonces $u \to 1$, $y = 2^u \to 2$.
Si $x \to +\infty$, entonces $u \to 1$, $y = 2^u \to 2$.

Ahora bien, las rectas $x = -1$ e $y = 2$ son las asíntotas del gráfico de la función y. En el punto $x = 1$ tenemos $u = 0$, $y = 2^0 = 1$.

Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 115, *b*); la flecha está representada para mostrar que el punto $(-1; 0)$ no pertenece a la gráfica.

Ejemplo 20. Utilizando la regla 12, constrúyase la gráfica de la función $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Construimos primero la gráfica de la función $u=\frac{x-1}{x+2}=$ $=1-\frac{3}{x+2}$ (fig. 116, *a*) y luego la gráfica de la función $y=$ $=\log_{1/2}u=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$. Por definición, la función logarítmica $y=\log_{1/2}u$ está definida sólo para aquellos valores de x para los cuales $u>0$, o sea, $\frac{x-1}{x+2}>0$ para x que satisfagan las desigualdades $-\infty<x<-2$ y $1<x<+\infty$, que son el dominio de determinación de la función $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Si $x\to-\infty$, entonces $u\to 1$, $y=\log_{1/2}u\to 0$.

Si $x\to-2$, entonces $u\to+\infty$, $y=\log_{1/2}u\to-\infty$.

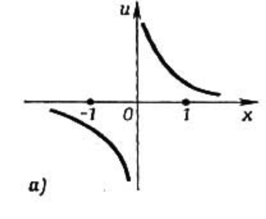
Si $x\to+\infty$, entonces $u\to 1$, $y=\log_{1/2}u\to 0$.

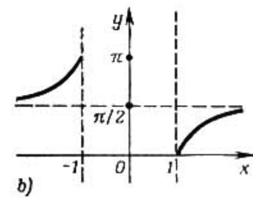
Si $x\to 1+$, entonces $u\to 0$, $y=\log_{1/2}u\to+\infty$.

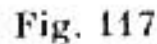
Ahora bien, las rectas $x=-2$, $x=1$ e $y=0$ son las asíntotas de la gráfica de la función y. Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 116, *b*).

Ejemplo 21. Utilizando la regla 12, constrúyase la gráfica de la función $y=\arccos(1/x)$.

Como antes, primero construimos la gráfica de la función $u=1/x$ (fig. 117, *a*) y luego la gráfica de la función $y=\arccos u=\arccos(1/x)$. Por definición, la función $y=$ $=\arccos u$ está definida sólo para






Fig. 117

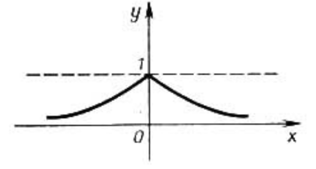


Fig. 118

aquellos x, para los cuales $-1\leqslant u\leqslant 1$, o sea, para x que satisfagan las desigualdades $-1\leqslant 1/x\leqslant 1$. Por lo tanto, en calidad de dominio

de definición de la función $y = \arccos\frac{1}{x}$ sirven dos intervalos: $-\infty < x \leqslant -1$ y $1 \leqslant x < +\infty$.

Si $x = -1$, entonces $u = -1$, $y = \arccos(-1) = \pi$.

Si $x = +1$, entonces $u = +1$, $y = \arccos 1 = 0$.

Si $x \to -\infty$, entonces $u \to 0$, $y = \arccos u \to \pi/2$.

Si $x \to +\infty$, entonces $u \to 0$, $y = \arccos u \to \pi/2$.

De esta manera, la recta $y = \pi/2$ es la asíntota de la gráfica. Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 117, *b*). ●

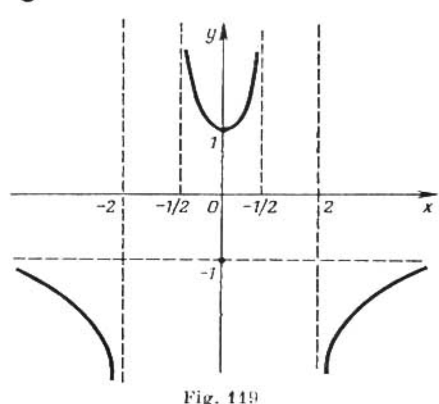


Fig. 119

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2^{|x|}$. **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. (*Resp.* Fig. 118.) **3.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$. **4.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/x^2}$. **5.** $y = 1 + 3^{x/(x-1)}$. **6.** $y = 2^{x^2-2x}$. **7.** $y = 2^{\operatorname{tg} x}$. **8.** $y = 2^{\operatorname{sen} x}$. **9.** $y = 2^{x^2-4x+5}$. **10.** $y = \log_{1/2}(x - x^2)$. **11.** $y = \log_2\frac{x+4}{2-x}$. **12.** $y = \log_2|\operatorname{sen} x|$. **13.** $y = \log_{1/2}\cos x$. **14.** $y = \log_{1/2}|x^2 - 3x + 2|$. **15.** $y = \log_2(\sqrt[3]{x+1} + 1)$. **16.** $y = \log_{1/2}\frac{2|x|-1}{|x|-2}$. (*Resp.* Fig. 119.) **17.** $y = \log_4|x+2|$. **18.** $y = |\log_4|x+2||$. **19.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1}$. **20.** $y = -2\operatorname{arctg}\frac{x}{2-x}$. **21.** $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **22.** $y = \frac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$. (*Resp.* Fig. 120. **Indicación.** Divídase previamente por $2^{1/x}$ el numerador de la fracción y su denominador).

En conclusión notemos que la habilidad para construir las gráficas de las funciones representadas por las fórmulas tiene no sólo una importancia teórica sino también práctica. El estudio de las funciones es más sencillo y evidente si se acompaña de un examen de las gráficas de estas funciones. He aquí por qué un ingeniero o colaborador científico, después de obtener la fórmula de una función que la interesa, en todos los casos en que se necesita aclarar el carácter general de comportamiento de la función y sus particularidades comienza a construir el esquema de la gráfica de esta función.

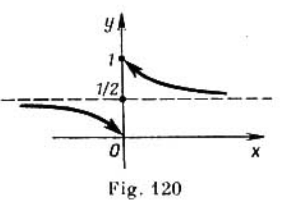


Fig. 120

Más adelante, con ayuda del cálculo diferencial, consideraremos métodos más exactos y más perfectos de construcción de las gráficas de funciones.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de función. ¿En qué consiste la univocidad de la función? ¿Qué se llama dominio de definición y dominio de los valores de una función? ¿Con ayuda de qué concepto se define la función?

2. ¿Qué se llama función constante?

3. Enúnciese la condición para que una función esté acotada.

4. Dése la definición de cota superior (inferior) exacta de una función.

5. ¿Qué significa la notación $\sup\limits_X f(x) = +\infty$ ($\inf\limits_X f(x) = -\infty$)?

6. ¿Qué se llama gráfica de una función? Cítense ejemplos de función y n función. Dese la interpretación geométrica.

7. ¿Qué significa representar una función? ¿Cuáles son los métodos de representación de la función?

8. Enúnciese la definición de función compuesta y de función inversa. Dense ejemplos.

9. Cítense las funciones elementales más simples.

10. ¿Qué función se llama elemental? Cítense ejemplos.

11. Cítense un ejemplo de una función no elemental.

12. Enúncinse las definiciones de las funciones racional, irracional y trascendente. Cítense ejemplos.

13. Descríbanse las etapas de construcción de la gráfica de la función $y = bf(kx + a) + c$, donde a, b, k, c son ciertos números, si se conoce el método de construcción de la gráfica de la función $y = f(x)$.

§ 2. Límite de una función

1. Límite de una función para $X \to X_0$. Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre cierto intervalo X [1]) y que el punto $x_0 \in X$ o bien $x_0 \notin X$. Tomemos de X la sucesión de los puntos distintos

[1]) Recuérdese que aquí X puede ser todo intervalo $[a, b]$, (a, b), $[a, b]$, $(-\infty, +\infty)$, etc.

de x_0.

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \tag{1}$$

que converge hacia x_0 [1]). Los valores de la función en los puntos de esta sucesión también forman la sucesión numérica

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots \tag{2}$$

y se puede hablar de la existencia de su límite.

Definición 1. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$ (o para $x \to x_0$), si para toda sucesión (1) que converge a x_0 de los valores del argumento x, distintos de x_0, la sucesión correspondiente (2) de los valores de la función converge a A.*

Simbólicamente esto se escribe así:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

La función $f(x)$ puede tener en el punto x_0 un solo límite. Esto se deduce del hecho de que la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene un solo límite.

Consideremos algunos ejemplos.

○ 1. La función $f(x) = C = \text{const}$ tiene un límite, igual a C, en cada punto x_0 de la recta numérica. En efecto, si (1) es cualquier sucesión convergente a x_0, la sucesión (2) tiene la forma $C, C, \ldots, C, \ldots$, o sea, $f(x_n) = C$. De aquí sacamos la conclusión de que $f(x_n) \to C$ para $n \to \infty$ o bien: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$.

2. La función $f(x) = x$ tiene en todo punto x_0 de la recta numérica un límite igual a x_0. En este caso las sucesiones (1) y (2) son idénticas, o sea, $f(x_n) = x_n$. Por consiguiente, si $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to x_0$ cuando $n \to \infty$ o bien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = f(x_0) = x_0.$$

Notemos que es cómodo utilizar la definición 1 cuando se necesita demostrar que la función $f(x)$ no tiene un límite. Para esto hace falta mostrar que existen dos sucesiones $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ de los valores del argumento x tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$, pero las sucesiones correspondientes $\{f(x'_n)\}$ y $\{f(x''_n)\}$ de los valores de la función tienen distintos límites.

3. La función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ (fig. 121), definida para todos los puntos $x \neq 0$, en el punto $x = 0$ no tiene límite. Efectivamente, tomemos dos sucesiones de los valores del argumento x: $\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{3\pi}, \ldots, \dfrac{1}{n\pi}, \ldots$ y $\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{5\pi}, \dfrac{2}{9\pi}, \ldots, \dfrac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots$ que conver-

[1]) Se supone que tal sucesión existe.

gen a cero. Las sucesiones correspondientes de los valores de la función son $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{3\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)$, ... y $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{5\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{9\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)$, ... Puesto que $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)=$ $=\operatorname{sen} n\pi=0$ para todo n y $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)=\operatorname{sen}\frac{(4n-3)\pi}{2}=1$, entonces para la primera sucesión

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen} n\pi=0$$

y para la segunda sucesión

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{(4n-3)\pi}{2}=1.$$

Por lo tanto, para dos convergentes a cero sucesiones de los valores del argumento x las sucesiones correspondientes de los valores

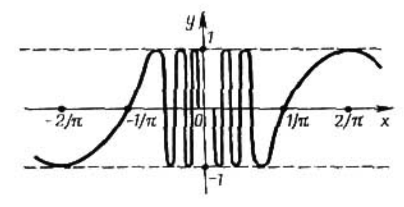


Fig. 121

de la función tienen distintos límites. Y esto, por definición de límite de una función, significa precisamente que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe.

4. La función $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ tiene en el punto $x=0$ el límite igual a 1. En efecto, tomemos cualquier sucesión de los valores del argumento x que converja a cero, o sea, $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ y $x_n\neq$ $\neq 0$, entonces, en virtud de los teoremas 3.7 a 3.9 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=\frac{0+0-1}{0-1}=1$$

(en este caso $x_n\neq 1$, ya que para $x=1$ la función que se considera no está definida). Ahora bien, existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=1$ y ya que éste no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero, entonces en virtud de la definición de límite de una función concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

5. La función de Dirichlet, cuyos valores en los puntos racionales son iguales a la unidad y en los irracionales, a cero, no tiene límite en ningún punto x_0 de la recta numérica. Efectivamente, para una sucesión de los valores racionales del argumento que converja en el punto x_0 el límite de las sucesiones correspondientes de la función es igual a la unidad y para una sucesión de los valores irracionales del argumento que converja en el punto x_0 el límite de la sucesión correspondiente de los valores de la función es igual a cero. ●

Existe otra definición de límite de una función.

Definición 2. *El número A se llama límite de una función $f(x)$ en el punto $x = x_0$, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, $x \neq x_0$, que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Las desigualdades $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ pueden escribirse en la forma $0 < |x - x_0| < \delta$.

La primera definición se funda en el concepto de límite de una sucesión numérica y por eso suele llamarse definición *«en el lenguaje de las sucesiones»*. La segunda definición se llama definición *«en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»*.

Teorema 4.1. *Las definiciones primera y segunda de límite de una función son equivalentes* [1]).

□ **Demostración.** 1) Sea A el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la primera definición. Mostremos que A es el límite conforme a la segunda definición. Supongamos lo contrario, o sea, que A no es el límite de esta función conforme a la segunda definición. Esto quiere decir que no para todo número $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal $\delta > 0$ que de la desigualdad $0 < |x - x_0| < \delta$ se deduzca la igualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$, o sea, existe tal $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ para el cual cualquier $\delta > 0$ que se tome habrá al menos un punto $x \neq x_0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Elegiremos en calidad de δ sucesivamente los números

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Entonces

para $\delta = 1$ en X existe tal $x_1 \neq x_0$ que
$|x_1 - x_0| < 1$ y $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
para $\delta = 1/2$ en X existe tal $x_2 \neq x_0$ que
$|x_2 - x_0| < 1/2$ y $|f(x_2) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
para $\delta = 1/3$ en X existe tal $x_3 \neq x_0$ que
$|x_3 - x_0| < 1/3$ y $|f(x_3) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
. . . .

[1]) O sea, si la función tiene un límite en el punto x_0 según una de las definiciones, ella tendrá el mismo límite también según la segunda definición.

para $\delta = 1/n$ en X existe tal $x_n \neq x_0$ que
$| x_n - x_0 | < 1/n$ y $| f(x_n) - A | \geqslant \varepsilon_0$.
. . . .

Como resultado obtenemos una sucesión de puntos distintos de x_0

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

que converge al punto x_0, ya que $| x_n - x_0 | < \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por eso, conforme a la primera definición de límite de una función, a sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función converge hacia el número A. Por lo tanto, para ε_0 habrá un número de orden N tal que para todos los números $n > N$ se cumple la desigualdad $| f(x_n) - A | < \varepsilon_0$. Pero esto no puede ser, ya que para todos los puntos x_n se cumple la desigualdad $| f(x_n) - A | \geqslant \varepsilon_0$. La contradicción obtenida demuestra que el número A es el límite de *la función $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la segunda definición.*

2) Sea ahora A el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la segunda definición. Esto quiere decir que para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $0 < | x - x_0 | < \delta$ se deduce la desigualdad $| f(x) - A | < \varepsilon$. Mostremos que A es el límite de $f(x)$ conforme a la primera definición. Tomemos cualquier sucesión de los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ que converja al punto x_0 $(x_n \neq x_0)$. Entonces para el valor indicado de $\delta > 0$, *correspondiente a ε conforme a la segunda definición, habrá N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $| x_n - x_0 | < \delta$. Pero al mismo* tiempo, en virtud de la segunda definición, se cumple también la desigualdad $| f(x_n) - A | < \varepsilon$. Y ya que ε ha sido elegido arbitrariamente, esto precisamente significa que $f(x_n) \to A$ para toda sucesión $\{x_n\}$ que converja en el punto x_0 $(x_n \neq x_0)$, o sea, el número A es el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la primer definición. ■

Una vez que hemos establecido la equivalencia de ambas definiciones de límite de una función, se pueden usar cualesquiera de ellas en dependencia de cuál es más cómoda para resolver uno u otro *problema.*

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición 2, demuéstrese que la función $f(x) = 3x - 2$ en el punto $x = 1$ tiene límite igual a 1, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$.

Resolución. Tomemos cualquier $\varepsilon > 0$. El problema consiste en hallar mediante este ε un $\delta > 0$ tal para el cual de la desigualdad $| x - 1 | < \delta$ resulte la desigualdad $| f(x) - 1 | = | (3x - 2) - 1 | < \varepsilon$. Transformando la última desigualdad, obtenemos

$$| 3(x - 1) | < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad | x - 1 | < \varepsilon/3.$$

De aquí se ve que si se toma $\delta \leqslant \varepsilon/3$, para todos los puntos x que satisfagan la desigualdad $|x-1| < \delta$ se cumple la desigualdad requerida $|f(x)-1| < \varepsilon$. Esto precisamente quiere decir que $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$. En particular, si $\varepsilon = 1$, entonces $\delta \leqslant 1/3$, si $\varepsilon = 1/2$, entonces $\delta \leqslant 1/6$, si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces $\delta \leqslant 0{,}03$, etc.; así pues, δ depende de ε. Por eso en la definición de límite se escribe, a veces, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Ejemplo 2. Utilizando la definición 2, demuéstrese que la función $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, definida para todos los puntos $x \neq 0$, en el punto $x = 0$ tiene un límite igual a 0, o sea, $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Al igual que antes, mediante este número ε hace falta hallar un número $\delta > 0$ tal, para el cual de la desigualdad $|x-0| < \delta$ se desprenda la desigualdad $|f(x)-0| = \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Transformando la última desigualdad, resulta $\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$ $\left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \text{ para } x \neq 0\right)$. De aquí se ve que si se toma $\delta \leqslant \varepsilon$, entonces, tan pronto como $|x| < \delta$, es válida la desigualdad $\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

Ejercicios. Utilizando la definición 2, demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$. **2.** $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. **4.** $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ $(f(x) = C = \text{const})$. **5.** $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Notemos que la definición de límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones» se llama también definición de límite de una función según Heine [1]) y la definición de límite de una función» en el lenguaje $\varepsilon - \delta$», definición de límite de una función según Cauchy [2]).

2. Límite de una función para $x \to x_0 -$ y para $x \to x_0 +$. A continuación usaremos el concepto de límites laterales de una función que se definen del modo siguiente.

Definición 3. *El número A se llama límite derecho* (*izquierdo*) *de la función $f(x)$ en el punto x_0, si para toda sucesión* (1) *que converge a x_0, cuyos elementos x_n son mayores* (*menores*) *que x_0, la sucesión correspondiente* (2) *converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A\right)$.

○ En calidad de ejemplo consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ [3]). Esta función tiene en el punto $x = 0$ los límites derecho e izquierdo:

---

[1]) H. Heine (1821 — 1881), matemático alemán.
[2]) O. Cauchy (1789 — 1857), matemático francés.
[3]) La definición de la función sgn x está dada en el subp. 2 del § 1.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$. En efecto, si (1) es toda sucesión convergente a cero de los valores del argumento de esta función, cuyos elementos x_n son mayores que cero ($x_n > 0$), entonces $\operatorname{sgn} x_n = 1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$. De un modo análogo se determina que $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$. ●

Se puede dar una definición equivalente de los límites laterales de la función «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»: *el número A se llama límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)$ en el punto x_0, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfagan las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) se cumpla la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

La relación entre los límites laterales y el límite de la función se establece por el teorema siguiente.

Teorema 4.2. *La función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un límite si, y sólo si, en este punto existen tanto el límite derecho como el izquierdo y ellos son iguales. En este caso el límite de la función es igual a los límites unilaterales.*

□ **Demostración.** Sea $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = A$. Entonces, según la definición de límite de una función por la izquierda y por la derecha, para todo número $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para todos los x que satisfacen las desigualdades $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ y para todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Y esto, según la definición 2, precisamente significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Inversamente, sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Entonces, conforme a la definición del límite de una función en el punto x_0, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Así pues, tanto para $x_0 - \delta < x < x_0$ como para $x_0 < x < x_0 + \delta$ es válida la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Y esto, según la definición de límites unilaterales, significa precisamente que

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} (x) = A. \ ■$$

○ **Ejemplo 3.** Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \leqslant 0, \\ x+1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

no tiene límite en el punto $x = 0$ (fig. 122).

Resolución. La función $f(x)$ está definida sobre toda la recta numérica. Para $x \leqslant 0$ la función se representa por la función $f(x) = x^2$. Puesto que el límite de la función x^2 en el punto $x = 0$ es igual a cero (demuéstrese esto por sí mismo), entonces, según el teorema 4.2, el límite izquierdo de la función dada en este punto también es igual a cero, o sea,

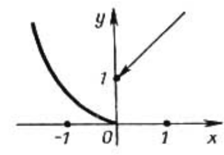


Fig. 122

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

De un modo análogo se demuestra que el límite derecho de la función dada en el punto $x = 0$ vale 1, o sea, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = \lim\limits_{x \to 0} (x+1) = 1$. Por consiguiente, la función dada tiene en el punto $x = 0$ los límites derecho e izquierdo, pero ellos no son iguales. Conforme al teorema 4.2 esto significa precisamente que en el punto $x = 0$ la función no tiene límite, o sea, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe. ●

Ejercicio. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{para } x \leqslant 1, \\ x+3 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$ no tiene límite.

○ **Ejemplo 4.** Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < 0, \\ \operatorname{sen} x & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$ tiene límite.

○ **Resolución.** La función $f(x)$ está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x = 0$. Calculemos en el punto $x = 0$ los límites unilaterales de la función $f(x)$. Tenemos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ (véase el ejemplo 2 del subp. 1); $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ (véase el ejemplo 3 del § 3). Por lo tanto, en el punto $x = 0$ la función dada tiene los límites derecho e izquierdo y ellos son iguales entre sí.

Conforme al teorema 4.2 esto significa que la función tiene en el punto $x = 0$ un límite y éste es igual a cero, o sea, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. ●

3. Límite de una función para $x \to \infty$, para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$. Además, de los conceptos considerados de límite de una función para $x \to x_0$ y de límites unilaterales existe también el concepto de límite de una función cuando el argumento tiende hacia el infinito.

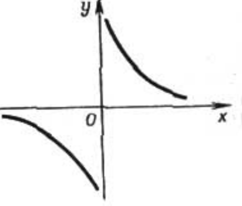


Fig. 123

Definición 4. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ para $x \to \infty$, si para toda sucesión infinitamente grande (1) de los valores del argumento la sucesión correspondiente (2) de los valores de la función converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Definición 5. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ para $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), si para toda sucesión infinitamente grande (1) de los valores del argumento, cuyos elementos x_n son positivos (negativos), la sucesión correspondiente (2) de los valores de la función converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \right)$[1].

○ Consideremos un ejemplo. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta función tiene, cuando $x \to \infty$, un límite igual a cero. Efectivamente, si $\{x_n\}$ es la sucesión infinitamente grande de los valores del argumento, la sucesión correspondiente de los valores de la función $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}, \ldots$ conforme al teorema 3.1 es infinitamente pequeña y por eso tiene un límite igual a cero, o sea, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (fig. 123). ●

Las definiciones 4 y 5 se dan «en el lenguaje de las sucesiones». Puede darse las definiciones equivalentes «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$». Recomendamos que el lector haga esto por sí mismo. A título de ejemplo enunciemos la definición de límite de una función para $x \to +\infty$.

Definición 6. *El número A se llama límite de la función $f(x)$*

[1]) Si los límites de la función $f(x)$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ son iguales a A, se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ($A = 0$).

para $x \to +\infty$, *si para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* δ *tal que para todos los puntos* $x \in X$ *que satisfacen la desigualdad* $x > \delta$ *se cumpla la desigualdad* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

○ **Ejemplo 5.** Utilizando la definición correspondiente del límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Resolución. La igualdad $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $|x| > \delta$ se deduce la desigualdad $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ o bien $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Determinemos los valores de x para los cuales se cumple la última desigualdad. Puesto que $|2x+1| > |2x| - 1$, basta resolver la inecuación $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, de donde obtenemos $|x| > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Si se toma $\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$, entonces para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x| > \delta$ se cumplirá la desigualdad $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Y esto significa que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 6. Utilizando la definición respectiva de límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$», demuéstrese que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$.

Resolución. La igualdad $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$ «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» quiere decir que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número δ tal que de la desigualdad $x > \delta$ resulta la desigualdad $\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| = \frac{14}{|3x+9|} < \varepsilon$. Determinemos los valores de x para los cuales se cumple la última desigualdad. Puesto que $x > 0$, entonces, resolviendo la inecuación $\frac{14}{3x+9} < \varepsilon$, obtenemos $x > \frac{14 - 9\varepsilon}{3\varepsilon}$. Si se pone $\delta = \frac{14 - 9\varepsilon}{3\varepsilon}$, entonces para todos los x que satisfacen la desigualdad $x > \delta$ se cumplirá la desigualdad $\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$. Y esto quiere decir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$. ●

Ejercicios. Utilizando la definición respectiva de límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$», demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{3x+2} = \frac{1}{3}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{2}{3}$. 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. **4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

○ **Ejemplo 7.** Demuéstrese que la función sen x no tiene límite cuando $x \to +\infty$.

Resolución. Demuéstrese que la función dada no satisface la definición 5. Para esto indiquemos una tal sucesión infinitamente grande $\{x_n\}$ de los valores del argumento, cuyos elementos son positivos, que la sucesión $\{\text{sen } x_n\}$ de los valores de la función sea divergente. Pongamos $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Entonces $x_n \to +\infty$ para $n \to \infty$, la sucesión $\{\text{sen } x_n\}$ toma los valores $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$, y la sucesión $\{(-1)^n\}$ (véase la observación para el teorema 3.6) diverge, y esto es lo que se quería demostrar. ●

Ejercicio. Demuéstrese que $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ no existe.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense dos definiciones de límite de una función. ¿Qué significa la equivalencia de estas definiciones?
2. Cítese un ejemplo de una función que no tenga límite en el punto dado.
3. ¿A qué condiciones de la existencia de los límites unilaterales de una función se deduce la existencia del límite de una función e inversamente?
4. ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?
5. Enúnciense dos definiciones de límite de una función para $x \to +\infty$.
6. Demuéstrese que $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ no existe.

§ 3. Teoremas de los límites de funciones

La definición de límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones» ofrece la posibilidad de extender los teoremas antes demostrados de los límites de sucesiones a las funciones. Mostremos esto citando como ejemplos dos teoremas.

Teorema 4.3. *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen en el punto x_0 los límites B y C. Entonces las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ (para $C \neq 0$) tienen en el punto x_0 los límites iguales a $B \pm C$, $B \cdot C$ y $\frac{B}{C}$, respectivamente.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ una sucesión arbitraria, convergente a x_0, de los valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Las sucesiones correspondientes $\{f(x_n)\}$ y $\{g(x_n)\}$ de los valores de estas funciones tienen los límites B y C. Pero entonces, en virtud de los teoremas 3.7 a 3.9, las sucesiones $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$ y $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (para $C \neq 0$) tienen los límites iguales a $B \pm C$, $B \cdot C$ y $\frac{B}{C}$, respectivamente. Conforme a la definición 1

de límite de una función esto quiere decir que

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=B\pm C,\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=B\cdot C,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{C}.\quad \blacksquare$$

Corolario. *El factor constante puede sacarse fuera del signo del límite, o sea* $\lim_{x\to x_0}[C\cdot g(x)]=C\lim_{x\to x_0}g(x)$, *donde* $f(x)=C$ *es el factor constante.*

En efecto, $\lim_{x\to x_0}[Cg(x)]=\lim_{x\to x_0}C\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=C\lim_{x\to x_0}g(x)$, ya que $\lim_{x\to x_0}C=C$ (véase el ejemplo 1 del subp. 1 del § 2).

Teorema 4.4. *Supongamos que las funciones* $f(x)$, $g(x)$ *y* $h(x)$ *están definidas en cierto entorno del punto* x_0, *a excepción, quizás, del mismo punto* x_0, *y las funciones* $f(x)$, $h(x)$ *tienen en el punto* x_0 *un límite igual a* A, *o sea,*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A.$$

Supongamos, además, que se cumplen las desigualdades $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. *Entonces,*

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A.$$

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ una sucesión arbitraria, convergente a x_0, de los valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $h(x)$. Las sucesiones correspondientes $\{f(x_n)\}$ y $\{h(x_n)\}$ de los valores de estas funciones tienen un límite igual a A, o sea, $f(x_n)\to A$, $h(x_n)\to A$ para $n\to\infty$. Utilizando las desigualdades dadas en la hipótesis del teorema, se puede escribir

$$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant h(x_n).$$

De aquí según el teorema 3.11 se desprende que $g(x_n)\to A$.

En virtud de la definición 1 de límite de una función esto quiere decir que

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A.\quad \blacksquare$$

Observación. Los teoremas 4.3 y 4.4 son justos también en el caso cuando x_0 es uno de los símbolos ∞, $+\infty$ o bien $-\infty$.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim_{x\to 1}(3x^2+x+5)$.

Resolución. En virtud del teorema 4.3 (límite de la suma y del producto) tenemos

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+x+5)=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}5=$$
$$=3\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+5=3\cdot 1\cdot 1+1+5=9,$$

ya que $\lim\limits_{x\to 1} x=1$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2).

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Resolución. El límite del numerador

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1+1+1=3$$

y el límite del denominador

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1-1+1=1.$$

Ya que el límite del denominador no es igual a cero, entonces, aplicando el teorema 4.3 (límite del cociente), finalmente obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)}=\frac{3}{1}=3.$$

Ejemplo 3. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x=0$.

Resolución. Sea $0<x<\pi/2$. Tomemos el arco $\overset{\smile}{AM}$ de la circunferencia de radio unitario y el ángulo cuya medida en radianes es igual a x (véase la fig. 124). Entonces $\overset{\smile}{AM}=x$, $KM=$ $=\operatorname{sen} x$. Puesto que $0<KM<\overset{\smile}{AM}$, entonces

$$0<\operatorname{sen} x<x \tag{1}$$

y ya que $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2), de las desigualdades (1) y del teorema 4.4 se deduce que $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x=0$

Demuéstrese por sí mismo que $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sen} x=0$.

Ejemplo 4. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$.

Resolución. Para todo $x\neq 0$ se cumplen las desigualdades

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}<1+\frac{1}{x^2}.$$

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ (demuéstrese esto por sí mismo). Según el teorema 4.4 obtenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=$ $=1$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense los teoremas 4.3 y 4.4 de límite de una función.
2. Demuéstrese el teorema 4.3. para $x\to+\infty$. ¿Dónde en la demostración del teorema se ha utilizado que $C\neq 0$?

§ 4. Dos límites notables

1. Primer límite notable:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

□ Demostremos la igualdad dada. Consideremos el arco de una circunferencia de radio $R=1$ con un ángulo central, cuya medida en radianes es igual a x $(0<x<\pi/2)$ (fig. 124). Entonces

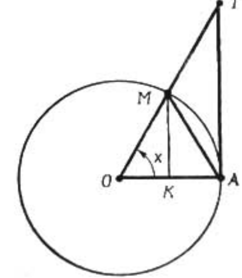


Fig. 124

$$OA=1,\quad \operatorname{sen} x=MK,\quad \operatorname{tg} x=AT. \quad (1)$$

Es evidente que el área del triángulo OAM es menor que el área del sector OAM la cual, a su vez, es menor que el área del triángulo OAT o bien, lo que es lo mismo, $\frac{1}{2}OA\cdot MK<\frac{1}{2}OA\cdot\overset{\smile}{AM}<\frac{1}{2}OA\cdot AT$. Tomando en consideración las igualdades (1), la última relación puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

de donde resulta

$$\operatorname{sen} x<x<\operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Dividiendo estas desigualdades por $\operatorname{sen} x$, obtenemos $1>\frac{\operatorname{sen} x}{x}>$ $>\cos x$, de donde encontramos $0<1-\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1-\cos x$. Puesto que $\operatorname{sen}\frac{x}{2}<1$, entonces $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}<\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Por eso, teniendo en cuenta la primera desigualdad (2), para todos los puntos x que

satisfacen las desigualdades $0 < x < \pi/2$ resulta

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} < 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x.$$

Así pues, $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < x$ para $0 < x < \pi/2$.

Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $\delta = \text{mín}\,\{\varepsilon, \pi/2\}$. Entonces para todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $0 < x < \delta$ se cumplirá la desigualdad $x < \varepsilon$, por eso

$$0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \varepsilon,$$

de donde

$$\left| 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que 1 es el límite derecho de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el punto $x = 0$, o sea, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Nótese que ahora la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, ya que $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = f(x)$. Por eso también el límite izquierdo de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el punto $x = 0$ es igual a 1. De aquí, en virtud del teorema 4.2, se desprende que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. ■

Observación. Utilizando las desigualdades $\operatorname{sen} x < x$ y $1 - \cos x < x$ para $0 < x < \pi/2$, obtenidas durante la consideración del primer límite magnífico, es fácil demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. (Hágase esto por sí mismo.)

Con ayuda del primer límite notable se calculan muchos otros límites.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Resolución. El denominador de la fracción para $x \to 0$ tiende a cero. Por eso el teorema 4.3 aquí es inaplicable. Para hallar el límite transformemos la fracción dada:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 (x/2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2} \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Ejemplo 3. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{sen} 4x}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{sen} 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5/4}{\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}=\frac{5/4}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}=\frac{5/4}{1}=1{,}25. \bullet$$

2. Segundo límite notable:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

□ Como se sabe, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ (véase el cap. 3, § 3, subp. 2). Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. Efectivamente, sea $x>1$. Pongamos $n=[x]$; entonces $x=n+\alpha$, donde n es el número natural y α satisface la condición $0\leqslant\alpha<1$. Puesto que $n\leqslant x<n+1$, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$, entonces

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Para $x\to+\infty$ $(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}.$$

De donde según el teorema 4.4 obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

Sea ahora $x<-1$. Pongamos $x=-y$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

para $x\to-\infty$.

Uniendo ambos casos, finalmente tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \blacksquare$$

El segundo límite notable tiene amplia aplicación. Con su ayuda se encuentran muchos otros límites.

○ **Ejemplo 4.** Hállese $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Resolución. Reemplacemos la variable, suponiendo $1/x=\alpha$. Entonces es evidente que $\alpha\to\infty$ para $x\to 0$. Por eso

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha=e.$$

Ejemplo 5. Hállese $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Resolución. Pongamos $x=3t$. Entonces cuando $x\to\infty$ $t\to\infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e\cdot e=e^3. \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrense los límites notables primero y segundo.
2. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

§ 5. Funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes

1. Funciones infinitamente pequeñas.

Definición 1. *La función $f(x)$ se llama función infinitamente pequeña (o simplemente infinitésima) en el punto $x=x_0$ (o para $x\to x_0$) si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Análogamente se determinan las funciones infinitamente pequeñas para $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_{0-}$ y $x\to x_{0+}$.

Puesto que el límite de una función infinitamente pequeña es igual a cero, o sea, $|f(x)-A|=|f(x)-0|=|f(x)|$, se puede dar una definición equivalente de la función infinitamente pequeña «**en el lenguaje $\varepsilon-\delta$**»: *la función $f(x)$ se llama infinitamente pequeña*

en el punto $x = x_0$, *si para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que para todos los puntos* $x \in X$, $x \neq x_0$, *que satisfacen la igualdad* $|x - x_0| < \delta$ *se cumple la desigualdad* $|f(x)| < \varepsilon$ *y* **«en el lenguaje de las sucesiones»:** *la función* $f(x)$ *se llama infinitamente pequeña en el punto* $x = x_0$, *si para toda sucesión* $\{x_n\}$ *convergente a* x_0 *de los valores del argumento, distintos de* x_0, *la sucesión correspondiente* $\{f(x_n)\}$ *es infinitamente pequeña.*

Al igual que las sucesiones infinitamente pequeñas, las funciones infinitamente pequeñas desempeñan un papel esencial: el concepto general de límite de una función puede ser reducido al concepto de infinitésima.

Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 4.5. *Para el cumplimiento de la igualdad* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *es necesario y suficiente que la función*

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

sea infinitésima cuando $x \to x_0$.

□ **Demostración. Necesidad.** Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Consideremos la diferencia $f(x) - A = \alpha(x)$ y mostremos que $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. Efectivamente, los límites de cada una de las funciones $f(x)$ y A para $x \to x_0$ son iguales a A y por eso, en virtud del teorema 4.3,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0.$$

Suficiencia. Sea $f(x) - A = \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. Mostremos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Puesto que $f(x) = A + \alpha(x)$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [A + \alpha(x)] = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \blacksquare$$

Del teorema 4.5 obtenemos la representación especial para una función que tenga en el punto $x = x_0$ un límite igual a A:

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ donde } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

En este caso se dice de ordinario que la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0 se distingue de A en una función infinitamente pequeña.

Las funciones infinitamente pequeñas poseen las mismas propiedades que las sucesiones infinitamente pequeñas. Es válido el teorema siguiente.

Teorema 4.6. *La suma algebraica y el producto de un número finito de funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$, así como el producto de una función infinitamente pequeña por una función acotada son funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$.*

Este teorema se deduce inmediatamente de la primera definición de límite de una función y de los teoremas 3.2 a 3.4.

Todo lo dicho de las funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$ es válido también para las funciones infinitamente pequeñas cuando $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0$, y $x \to x_{0+}$.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la función $f(x) = (x-1)\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ cuando $x \to 1$ es infinitésima, o sea, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}\frac{1}{x-1} = 0$.

Resolución. Puesto que $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ (demuéstrese esto por sí mismo), entonces, según la definición 1, la función $(x-1)$ es infinitésima para $x \to 1$ y puesto que la función $\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ está acotada $\left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}\right| \leqslant 1\right)$, entonces la función $f(x)$ dada no es más que el producto de una función infinitamente pequeña por una función acotada. Según el teorema 4.6. esto quiere decir que $f(x)$ es una función infinitamente pequeña para $x \to 1$, o sea, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}\frac{1}{x-1} = 0$. ●

2. Funciones infinitamente grandes.

Definición 2. *La función $f(x)$ se llama función infinitamente grande (o simplemente infinita) en el punto $x = x_0$ (o bien para $x \to x_0$), si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ $x \neq x_0$, que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$.*

En este caso se escribe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y se dice que la *función tiende al infinito para $x \to x_0$* o tiene un *límite infinito en el punto $x = x_0$*.

En cambio, si se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$, se escribe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$ y se dice que la *función tiene en el punto x_0 un límite infinito, igual a $+\infty$ $(-\infty)$*.

Por analogía con los límites unilaterales finitos se definen también los límites unilaterales infinitos:

$$\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_{0+}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = -\infty.$$

Así, por ejemplo, se escribe $\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$ si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta$ se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$.

«En el lenguaje de las sucesiones» la misma definición se escribe así: $\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$ si para toda sucesión $\{x_n\}$, convergente a x_0, de los valores del argumento x, cuyos elementos x_n son mayores que x_0, la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función es una función infinitamente grande de signo positivo.

Recomendamos que el lector dé la definición exacta de semejantes límites por sí mismo.

De un modo análogo se definen las funciones infinitamente grandes para $x \to \infty$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Así, por ejemplo, la función $f(x)$ se llama infinitamente grande para $x \to \infty$, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen la desigualdad $|x| > \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

En cambio, si se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), se escribe $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$).

Proponemos que el lector enuncie de manera independiente la *definición de la función infinitamente grande cuando* $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

En conclusión mostremos que entre las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes existe la misma relación que entre las sucesiones respectivas, o sea, la función inversa a la infinitésima es *infinitamente grande y al contrario.*

En efecto, sea $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$. Demostremos que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Asignemos un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Puesto que $f(x)$ es una función infinitamente pequeña en el punto x_0, entonces para el número $1/\varepsilon$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, que satisfacen las desigualdades $0 < |x - x_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x)| < \frac{1}{\varepsilon}$. Pero entonces para los mismos puntos x se cumple la desigualdad $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon$, o sea, $\frac{1}{f(x)}$ es la función infinitamente grande en el punto $x = x_0$, y esto es lo que se quería demostrar. (Recomendamos que el lector demuestre por cuenta propia la afirmación inversa.)

○ **Ejemplo 2.** Utilizando la definición 2, demuéstrese que la

función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ para $x\to 1$ es **infinitamente grande**, o sea, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$.

Resolución. Según la definición es necesario demostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $|x-1|<\delta$ se desprende la desigualdad $|f(x)|>\varepsilon$, o sea, $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$.

Tomemos cualquier $\varepsilon>0$ y resolvamos la inecuación $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$. Resulta $|x-1|<1/\varepsilon$. Ahora bien, en calidad de δ se puede tomar el número $1/\varepsilon$.

Así pues, para todo número $\varepsilon>0$ existe $\delta=1/\varepsilon$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x-1|<\delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)|>\varepsilon$. Esto significa precisamente que la función dada $f(x)$ es infinitamente grande cuando $x\to 1$.

Ejemplo 3. *Demuéstrese que la función* $f(x)=\log_a x$ $(a>1)$ *para* $x\to+\infty$ *es infinitamente grande, o sea,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

Resolución. Es necesario mostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $x>\delta$ se desprende la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$.

Tomemos todo número $\varepsilon>0$ y consideremos la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$. Si se toma $\delta=a^{\varepsilon}$, para $x>\delta$ se cumplirá la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$ y esto quiere decir que la función dada $f(x)$ es infinitamente grande cuando $x\to+\infty$.

Ejemplo 4. *Sea* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$. *Demuéstrese que* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.

Resolución. Es necesario demostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$ se desprende la desigualdad $f(x)+g(x)>\varepsilon$, o sea, la función $f(x)+g(x)$ satisfaga la definición de la función infinitamente grande de signo positivo en el punto x_0.

Mostremos previamente que si la función $f(x)$ tiene un límite para $x\to x_0$, *entonces existe el* δ'*-entorno del punto* x_0 *en el cual*

$$|f(x)|<M, \tag{1}$$

donde M es cierto número positivo. Efectivamente, según los datos del problema $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, entonces en virtud de la definición de límite de una función para $\varepsilon=1$ existe $\delta'>0$ tal que de la desigualdad $|x-x_0|<\delta'$, $x\neq x_0$, se desprende la desigualdad $|f(x)-A|<1$. Puesto que $|f(x)-A|\geqslant|f(x)|-|A|$ (véase el teorema 1.4), entonces $|f(x)|-|A|<1$, de donde $|f(x)|<|A|+1=M$, que es lo que se quería mostrar.

Tomemos ahora todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que según los datos del problema $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, entonces, de acuerdo con la definición de la función infinitamente grande cuando $x \to x_0$, para el número $\varepsilon + M > 0$ existe $\delta > 0$ $(\delta \leqslant \delta')$ tal que de la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se desprende la desigualdad

$$g(x) > \varepsilon + M. \tag{2}$$

De las desigualdades (1) y (2) obtenemos que para $|x - x_0| < \delta \leqslant \delta'$ es válida la desigualdad $f(x) + g(x) \geqslant g(x) - |f(x)| > \varepsilon + M - M = \varepsilon$ y esto quiere decir que la función $f(x) + g(x)$ satisface la definición de la función infinitamente grande para $x \to x_0$, o sea $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de función infinitamente pequeña: a) para $x \to x_0$; b) para $x \to \infty$. Cítense ejemplos de tales funciones.
2. ¿Qué relación existe entre el concepto de límite de una función y el de función infinitamente pequeña?
3. Enúnciese la definición de función infinitamente grande: a) para $x \to x_0$; b) para $x \to \infty$.
4. ¿Qué significan las notaciones: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$? Dense las definiciones correspondientes.
5. ¿Qué relación existe entre las funciones infinitamente pequeña e infinitamente grande?

§ 6. Comparación de las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes

Ya sabemos que la suma, diferencia y producto de las funciones infinitamente pequeñas son funciones infinitamente pequeñas. Hablando en general, esto no se puede decir del cociente: la división de una infinitésima por otra puede dar diferentes resultados. Así, por ejemplo, si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

En cambio, si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Consideremos las reglas de comparación de las funciones infinitamente pequeñas.

Supongamos que para $x \to x_0$ las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas. Entonces:

1) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, $\alpha(x)$ se llama *infinitésima de un orden superior* a $\beta(x)$ (se dice también que $\alpha(x)$ tiene un *orden de pequeñez superior* a $\beta(x)$ para $x \to x_0$);

2) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A es un número), entonces $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman *infinitésimas del mismo orden* (tienen "la misma velocidad" al tender a cero);

3) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, entonces $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman *infinitésimas equivalentes*. La equivalencia se designa así: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. En algunos casos resulta insuficiente saber que una de las dos infinitésimas es infinitésima de orden superior que la otra. Es necesario, además, estimar cuán alto es este orden. Por eso se introduce la **regla** siguiente:

4) *si* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, *entonces* $\alpha(x)$ *se denomina infinitésima de n-ésimo orden respecto a* $\beta(x)$.

Existen reglas análogas para comparar las funciones infinitamente pequeñas cuando $x \to \infty$, cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$, así como para $x \to x_0$ por la derecha y por la izquierda.

○ Consideremos algunos ejemplos.

1. Las funciones $\operatorname{sen} x$ y x son para $x \to 0$ infinitésimas equivalentes, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

2. Las funciones $\operatorname{sen} 3x$ y $\operatorname{sen} x$ son para $x \to 0$ infinitésimas del mismo orden, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3 \cdot \operatorname{sen} 3x)}{(3x)}}{(\operatorname{sen} x)/x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 3.$$

3. La función $\alpha(x) = 1 - \cos x$ es para $x \to 0$ infinitésima de segundo orden de pequeñez respecto a la infinitésima x, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 (x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} (x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}. \quad \bullet$$

Al comparar las funciones infinitamente pequeñas se utiliza frecuentemente el símbolo o («o pequeña»). Si la función $\alpha(x)$ en el punto x_0 es infinitésima de orden superior de la infinitésima $\beta(x)$ en este mismo punto, esto se escribe convencionalmente así:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Nótese también que si las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas en el punto x_0, la función $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ tiene un orden de pequeñez superior a cada uno de los factores. En efecto,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

y *por eso* $\alpha(x)\beta(x)=o(\beta(x))$, $\alpha(x)\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Para las funciones infinitamente grandes tienen lugar las reglas de comparación análogas.

Vamos a considerar algunos ejemplos.

○ *1. Las funciones* $\alpha(x)=\frac{1+x}{x}$ y $\beta(x)=\frac{1}{x}$ *son para* $x\to 0$ infinitas equivalentes, ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

En este caso se dice también que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ tienen el *mismo orden de crecimiento* para $x\to 0$.

2. La función $\alpha(x)=x^2+4$ es para $x\to\infty$ infinita de un orden inferior de $\beta(x)=x^3-2$ (*tiene un orden de crecimiento inferior*), ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x^2}{x-2/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

3. Las funciones infinitamente grandes para $x\to\infty$ $\alpha(x)=2x^2+1$ y $\beta(x)=x^2-1$ tienen el mismo orden de crecimiento, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1-1/x^2}=2.$$

4. La función $\alpha(x)=x^4+x+1$ es para $x\to\infty$ infinita de segundo orden respecto a la infinita $\beta(x)=x^2+1$, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^3+1/x^4}{1+2/x^2+1/x^4}=1.$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué significa comparar dos funciones infinitamente pequeñas?
2. Cítense ejemplos de una función infinitamente pequeña $\alpha(x)$: a) del mismo orden de pequeñez que la función $\beta(x)$ en el punto x_0; b) equivalente a la función $\beta(x)$ en el punto x_0; c) de un orden de pequeñez inferior de $\beta(x)$ para $x\to x_0$.
3. ¿Qué significa la notación simbólica $\alpha(x)=o(\beta(x))$ para $x\to x_0$?
4. Demuéstrese que: a) $x^3=o(x^2)$ para $x\to 0$; b) $(x-1)^2=o(x-1)$ para $x\to 1$.

5. ¿Es justa la igualdad $x^3 = o(\beta(x))$ para $x \to 0$ si $\beta(x) = x^2 \operatorname{sen} x$?
6. Demuéstrese que $1/x^4 = o(1/x^3)$ para $x \to \infty$.
7. ¿Es justa la igualdad $\frac{1}{x^4} = o(\beta(x))$ para $x \to \infty$ si $\beta(x) = \frac{1}{x^3 \operatorname{sen} x}$?
8. Demuéstrese que $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ para $x \to 0$.
9. *Compárense las siguientes funciones infinitamente grandes para* $x \to \infty$: a) $\alpha(x) = x^2 + 5x$ y $\beta(x) = x^3 + 2x^2$; b) $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ y $\beta(x) = (x-1)^2$; c) $\alpha(x) = \sqrt{x+1}$ y $\beta(x) = \sqrt{x}$.

§ 7. Cálculo de los límites de funciones

Nos hemos familiarizado con el concepto de límite de una función $f(x)$ para $x \to x_0$, $x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, así como con la aplicación inmediata del teorema 4.3 de límites de la suma, producto y cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, que tienen límites finitos, para el cálculo de límites, etc. Nos queda considerar los casos que no se abarcan por los métodos antes examinados.

Diremos que la relación de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la *indeterminación de la forma* $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, si el numerador de la fracción y su denominador tienden simultáneamente a cero o al infinito cuando $x \to x_0$, $x \to x_0+$, $x \to x_0-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$. En estos casos no se puede decir nada determinado sobre el límite de la relación $f(x)/g(x)$, ya que este límite puede ser igual a cero, al infinito, a un número distinto del cero y puede no existir absolutamente. Evaluar *estas indeterminaciones quiere decir calcular el límite de la relación* $\frac{f(x)}{g(x)}$, si es que éste existe, o determinar que no existe. En ejemplos concretos veremos cómo se hace esto.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Resolución. No se puede aplicar inmediatamente el teorema 4.3 (límite del cociente), ya que el límite del denominador para $x \to -2$ es igual a cero. Aquí el límite del numerador para $x \to -2$ también es igual a cero. Por consiguiente, tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Es necesario, como se dice, *evaluar esta indeterminación.* Para esto descompongamos en factores el numerador y el denominador y simplifiquemos lo obtenido eliminando el factor común $x+2$ que anula el denominador de la fracción y su numerador. Esto se puede hacer, ya que según la definición de límite de una función *el valor de la función en el punto $x = -2$ no entra en el conjunto de los valores de la función.* Obtenemos

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4}.$$

Puesto que ahora el denominador no es igual a cero, la indeterminación $\frac{0}{0}$ queda evaluada. Empleando el teorema 4.3, encontramos finalmente

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)} = \frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \ \bullet$$

Al calcular los límites de la relación de dos polinomios para $x\to\infty$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, para evaluar la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ es necesario dividir el numerador de la fracción y su denominador por x de grado mayor; de esta división el valor de la fracción no cambia. En este caso si en el numerador y en el denominador los polinomios son del mismo grado, el límite es igual a la relación de los coeficientes con grados mayores y si son de un grado diferente, el límite es igual a 0 o bien a ∞.

○ **Ejemplo 2.** Hállese $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^2 el numerador de la fracción y su denominador y aplicando luego el teorema 4.3, resulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+2/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x^2+3x+4}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^2 el numerador de la fracción y su denominador y empleando luego el teorema 4.3, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x^2+3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(4/x^2)} = \frac{0+0}{2+0+0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ejemplo 4. Hállese $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+5}{x^2+3}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^3 el numerador de la fracción y su denominador, resulta

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+5/x^3}{1/x+3/x^3}=\infty,$$

ya que para $x\to\infty$ la función $h(x)=1+5/x^3$ tiene un límite igual a 1, la función $\frac{1}{h(x)}$ está acotada (demuéstrese esto por sí mismo), la función $g(x)=1/x+3/x^3$ es infinitamente pequeña (demuéstrese también esto por sí mismo y $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\times\frac{1}{h(x)}=0$ (producto de la función acotada por la infinitamente pequeña), o sea, la función dada, como inversa, es una función infinitamente grande para $x\to\infty$. ●

Ejercicios. Hállese: **1.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5+x+1}{x^6+x^3+1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+6}$. **3.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$. **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{3x^4+3x+4}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^3-4x}{x^3+2x^2+4}$. **6.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$.

Continuaremos el cálculo de los límites de funciones después de examinar el concepto de continuidad de una función.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué significan las notaciones: $x\to x_0$, $x\to x_0-$, $x\to x_0+$, $x\to+\infty$ $x\to-\infty$ y $x\to\infty$?
2. ¿En qué casos se habla de la existencia de la indeterminación que tiene la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$?
3. ¿Qué significan las palabras: «la indeterminación queda evaluada»?
4. ¿Por qué $x\neq x_0$ para $x\to x_0$?

§ 8. Concepto de continuidad de una función

El concepto de continuidad de una función es uno de los más fundamentales del análisis matemático.

1. Definición de continuidad de una función. Supongamos que sobre cierto intervalo X está definida la función $f(x)$ y el punto x_0 pertenece a este intervalo [1]).

[1]) Nótese que esto no se necesitaba cuando considerábamos el límite de la función $f(x)$ en el punto x_0. En esto radica la diferencia entre el concepto de continuidad de una función y el de su límite.

Definición 1. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si el límite de la función y su valor en este punto son iguales, o sea,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, la relación (1) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

o sea, para una función continua los signos de la función y del límite pueden permutarse.

Se puede dar una definición equivalente de la continuidad de una función «en el lenguaje de las sucesiones»: *la función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si para toda sucesión de los valores del argumento x: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, convergente a x_0, la sucesión de los valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ converge a $f(x_0)$.*

Por analogía con la definición de límite de una función se puede enunciar la definición de continuidad de una función «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$».

Definición 2. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la igualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

La equivalencia de estas definiciones es evidente.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición 1, demuéstrese la continuidad de la función $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ en el punto $x = 1$.

Resolución. Primero determinamos el límite de la función dada para $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 + 2x + 1) = 3 \lim_{x \to 1} x^2 + 2 \lim_{x \to 1} x + 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Luego calculemos el valor de la función en el punto $x = 1$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Comparando los resultados obtenidos, vemos que el límite de la función y su valor en el punto $x = 1$ son iguales, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Según la definición 1 esto quiere decir que la función dada es continua en el punto $x = 1$. Análogamente, se puede mostrar que esta función es continua en todo punto de la recta numérica. ●

Si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$), entonces la función $f(x)$ se denomina *continua en el punto x_0 por la derecha (por la izquier-*

da). Si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 por la izquierda y por la derecha, ella es *continua en este punto*. En efecto, en virtud del teorema 4.2, en el caso dado el límite de la función en el punto x_0 es igual al valor de la misma en este punto.

Demos, por último, una definición más de la continuidad de una función la cual, en realidad, es la paráfrasis de la primera definición. Traslademos en la igualdad (1) $f(x_0)$ al primer miembro e introduzcamos $f(x_0)$ bajo el signo del límite. Puesto que las condiciones $x \to x_0$ y $(x - x_0) \to 0$ son equivalentes, resulta

$$\lim_{(x-x_0)\to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \qquad (2)$$

La diferencia $x - x_0$ se llama *incremento del argumento x en el punto x_0* y, por regla general, se designa Δx (se lee: «delta equis») y la diferencia $f(x) - f(x_0)$, incremento de la función en el punto x_0, provocado por el incremento del argumento Δx, y se designa Δy. Por lo tanto,

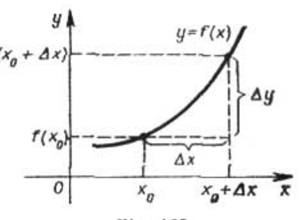


Fig. 125

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nótese que Δy es la función del argumento Δx para el punto fijo x_0. El significado geométrico de los incrementos está claro de la fig. 125. En las nuevas designaciones la igualdad (2) toma la forma

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \qquad (3)$$

La relación (3) es precisamente una definición más de la continuidad de la función, la cual puede enunciarse así.

Definición 3. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si su incremento en este punto es una función infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$.*

Para el uso práctico la última definición es, a veces, más cómoda y a continuación la utilizaremos también.

○ **Ejemplo 2.** Investíguese si es continua o no la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

Resolución. Tomemos cualquier punto x_0 sobre la recta numérica. Son posibles dos casos: 1) el número x_0 es racional y 2) el número x_0 es irracional.

En el primer caso 1) $f(x_0) = 1$. En todo entorno del punto racional existen puntos irracionales en los cuales $f(x) = 0$. Por consi-

guiente, en todo entorno del punto x_0 hay puntos x en los cuales el incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0) = 0 - 1 = -1$.

En el caso 2) $f(x_0) = 0$. En todo entorno del punto irracional hay puntos racionales en los cuales $f(x) = 1$. Por lo tanto, en todo entorno del punto x_0 hay puntos x en los cuales el incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0) = 1 - 0 = 1$.

Ahora bien, el incremento de la función Δy puede tomar tanto el valor igual a 1 como el valor igual a -1, o sea, no tiende a cero para $\Delta x \to 0$. Según la definición 3 esto significa que la función de Dirichlet no es continua en el punto x_0. Y puesto que el punto x_0 fue elegido arbitrariamente, entonces con ello se demuestra que la función de Dirichlet no es continua en cada punto y, por lo tanto, sobre toda la recta numérica. ●

2. Operaciones aritméticas con funciones continuas.

Teorema 4.7. *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el punto x_0. Entonces las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son también continuas en este punto (la última función, para $g(x_0) \neq 0$).*

□ **Demostración.** Puesto que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto x_0 tienen en este punto límites iguales a $f(x_0)$ y $g(x_0)$, entonces, según el teorema 4.3, los límites de las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ existen y son iguales a $f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x_0) \cdot g(x_0)$ y $f(x_0)/g(x_0)$, respectivamente. Pero estas magnitudes son iguales a los valores de las funciones correspondientes en el punto x_0. Por consiguiente, según la definición 1, las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son continuas en el punto x_0. ■

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense tres definiciones de la continuidad de una función en el punto x_0.
2. ¿En qué consiste la diferencia entre el concepto de continuidad de una función y el de límite de una función en el punto x_0?
3. ¿Por qué de la continuidad de una función por la izquierda y por la derecha en el punto x_0 se deduce la continuidad de una función en este punto? ¿En virtud de qué teorema?
4. Enúnciese el teorema de las operaciones aritméticas con funciones continuas.

§ 9. Continuidad de algunas funciones elementales

Una de las propiedades importantes de las funciones elementales es su continuidad en cada punto del dominio de su definición. Con ejemplos de algunas funciones, vamos a verificar este hecho al utilizar

la definición de continuidad de las funciones en un punto y el teorema 4.7.

1. Continuidad de las funciones racionales. Un ejemplo elemental de una función continua en todo punto x_0 de la recta numérica es la función constante $f(x) = C$. Efectivamente, en este caso $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C = f(x_0)$ (véase el ejemplo 1, subp. 1 del § 2), o sea, la función constante es continua en cada punto de la recta numérica.

La función $f(x) = x$ es también continua en cada punto x_0 de la recta numérica, ya que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x = f(x_0)$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2), o sea, el límite de la función en el punto x_0 es igual a su valor en este punto. De lo dicho y del teorema 4.7 se desprende que en todo punto x_0 las funciones $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $x^4 = x^3 \cdot x$, ..., $x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n es un número natural) son continuas. Como ya sabemos, la función $f(x) = x^n$ se dice potencial y la función de la forma

$$P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

donde $n \geqslant 0$ es un número entero y C_0, C_1, C_2, ..., C_n son cualesquiera números, se llama polinomio.

Cada uno de los sumandos $C_0 x^n$, $C_1 x^{n-1}$, $C_2 x^{n-2}$, ..., C_n es producto de dos funciones continuas (constante y potencial). Conforme al teorema 4.7 este producto es continuo en todo punto x. De este modo el polinomio $P(x)$ es la suma de las funciones continuas en todo punto x y, por consiguiente, es continuo en cada punto x.

La función racional fraccional, o sea, la función de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, es continua en todos los puntos x en los cuales su denominador no es igual a cero (o sea, en todos los puntos, a excepción de las raíces del denominador), como cociente de las funciones continuas.

Por ejemplo, la función $R(x) = \frac{3x^2 + 7x - 1}{x^2 - 1}$ es continua en todos los puntos x distintos de $+1$ y -1.

2. Continuidad de las funciones trigonométricas. Consideremos las funciones trigonométricas: sen x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x. Mostremos que la función sen x es continua en todo punto x. Hagamos uso de la definición 3 de continuidad de una función. Asignando al argumento x el incremento Δx, obtenemos el incremento de la función

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$

o bien

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

Pasando al límite en los miembros primero y segundo de la igualdad para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 2\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\right]=0,$$

ya que

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0\ ^{1)},$$

y el producto de una función acotada por una infinitamente pequeña es una infinitésima. Ahora bien, la función $\operatorname{sen} x$ es continua en todo punto x. La continuidad de la función $\cos x$ en todo punto x se demuestra de un modo análogo.

Según el teorema 4.7, de la continuidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se deduce la continuidad de las funciones $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ en todos los puntos donde $\cos x\neq 0$, o sea, en todos los puntos, salvo $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, y la de las funciones $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ en *todos los puntos, salvo* $x=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. Continuidad de la función $f(x)=|x|$. La función $f(x)=|x|$ cuyo gráfico está representado en la fig. 101 está definida y es continua en todos los puntos de la recta numérica. Efectivamente, en los puntos de la semirrecta $(0, +\infty)$ ella es continua, ya que para $x>0$ $f(x)=x$ (*véase el subp. 1*). *En los puntos de la semirrecta* $(-\infty, 0)$ la función $f(x)$ es también continua, ya que $f(x)=-x$ para $x<0$, puede ser representada como el producto de dos funciones continuas (-1) y x, y se puede aplicar el teorema 4.7 de la continuidad del producto. Para determinar la continuidad de la función $|x|$ en el punto $x=0$, calculemos los límites laterales

---

[1]) Aquí ha sido utilizado el primer límite notable que se obtiene como resultado de la sustitución de la variable $t=\Delta x/2$; $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=1$ $\left(\text{es evidente que } t=\frac{\Delta x}{2}\to 0 \text{ cuando } \Delta x\to 0\right)$.

de la función en este punto:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = -\lim_{x\to 0^-} x = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Así pues, los límites de la función en el punto $x = 0$ por la izquierda y por la derecha coinciden y son iguales al valor de la función en este punto. De aquí se desprende que la función $|x|$ es continua en *el punto $x = 0$ y, por lo tanto, es continua en todos los puntos de la* recta numérica.

Así pues, nos hemos convencido de que las funciones consideradas son continuas en cada punto del dominio de su definición. En virtud del teorema 4.7 de la continuidad de la suma, diferencia, producto *y cociente se puede afirmar que las funciones obtenidas de ellas me*diante un número finito de operaciones aritméticas son también funciones continuas en cada punto del dominio de su definición.

Diremos que la función $f(x)$ es continua en el intervalo (a, b) si es continua en cada punto de este intervalo; es continua sobre el *segmento $[a, b]$ si es continua en el intervalo (a, b), y es continua* en el punto a por la derecha y en el punto b por la izquierda, o sea,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

4. Continuación del cálculo de los límites de funciones. Después de que hemos determinado que las funciones elementales poseen propiedad de continuidad en cada punto del dominio de su definición, se abren amplias posibilidades para calcular los límites de las funciones elementales.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x}$.

Resolución. Puesto que la función $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x}$ es continua en el punto $x = \pi/2$, o sea, el límite de la función y su valor en este punto son iguales, entonces, pasando al límite, resulta

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{sen}(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)} = \frac{1+1}{1-(-1)} = 1.$$

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$ y no es continua en este punto. Por eso, al igual que en el ejemplo precedente, no se puede pasar inmediatamente al límite. Para encontrar

el límite es necesario transformar idénticamente la función $f(x)$ de un modo tal que ella para $x \neq 0$ coincida con cierta función $F(x)$ continua en el punto $x = 0$, o sea, hallar una función continua $F(x)$ tal que $f(x) = F(x)$ para $x \neq 0$ o bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Para esto multipliquemos el numerador de la fracción y su denominador por la suma $\sqrt{x+1}+1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$
$$= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = F(x).$$

Ahora bien, $f(x) = F(x)$ para $x \neq 0$. Pero la función $F(x)$ es continua en el punto $x = 0$. Por eso

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Hállese $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ no está definida en el punto $x = \pi/4$. Para hallar el límite transformamos la fracción:

$$\frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} 2x - (1 + \cos 2x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} =$$
$$= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{2\cos x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 2\cos x.$$

Para $x \neq \pi/4$ tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 2\cos x.$$

Pero la función $2\cos x$ es continua en el punto $x = \pi/4$. Por eso, pasando al límite, resulta

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \lim_{x\to\pi/4} 2\cos x =$$
$$= 2 \lim_{x\to\pi/4} \cos x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \quad \bullet$$

Al calcular los límites de las funciones para $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, que contienen los radicales, es necesario examinar el valor aritmético de la raíz $\sqrt{x^2} = |x|$ para $x > 0$ y $x < 0$.

○ **Ejemplo 4.** Hállese: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Resolución. En todos los casos tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Para $x>0$ tenemos $\sqrt{x^2}=x$, por eso

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) Para $x<0$ tenemos $\sqrt{x^2}=-x$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} = -\frac{1}{1} = -1.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ no existe, ya que los límites para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ son diferentes.

Ejemplo 5. Hállese $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para $x<0$ $\sqrt{x^2}=-x$, $\sqrt[3]{x^3}=x$, por eso

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3(1+1/x^3)}-\sqrt{x^2(4-1/x^2)}}{x(1+7/x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}-|x|\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}+x\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)} =$$

$$= \frac{1+2}{1} = \frac{3}{1} = 3. \; \bullet$$

Diremos que la suma de dos funciones infinitamente grandes de signos opuestos es una indeterminación de la forma $\infty-\infty$.

En este caso no se puede decir nada determinado del límite de la suma, ya que este límite puede ser igual a cero, al infinito, a un número distinto del cero y puede no existir en absoluto.

○ **Ejemplo 6.** *Hállese:* 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Resolución. 1) Tenemos una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Para hallar el límite multipliquemos y dividamos por la suma $\sqrt{x^2+4x}+x$, y *como resultado obtendremos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}.$$

Tenemos ahora una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para evaluar la indeterminación dada dividamos la fracción por x y luego pasemos al límite. Resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2(1+4/x)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{1+4/x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1}=\frac{4}{1+1}=2;$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=+\infty$, ya que la suma de dos funciones infinitamente grandes es una función infinitamente grande (demuéstrese esto por sí mismo).

De 1) y 2) se deduce, en particular, que $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$ no existe. ●

Diremos que el producto de una función infinitamente pequeña por una infinitamente grande es una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

○ **Ejemplo 7.** Hállese $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Para hallar el límite reemplacemos la variable, poniendo $1-x=y$. Puesto que $\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, entonces para $x\to1$ la nueva *variable* $y\to0$. *Además, si* $1-x=y$, *entonces* $x=1-y$. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to0}y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim_{y\to0}y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=$$

$$=\lim_{y\to0}y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to0}y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to0}\cos\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\cdot1=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}.$$

Se obtuvo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aquí es cómodo utilizar el primer límite notable. Para esto transformemos la fracción:

$$\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y\right)/y}=\frac{2/\pi}{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y\right)/\left(\frac{\pi}{2}y\right)}.$$

Finalmente tenemos

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\frac{2/\pi}{\lim\limits_{y\to0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}\right)}=\frac{2/\pi}{1}=\frac{2}{\pi}. \quad \bullet$$

Notemos que la evaluación de las indeterminaciones no es, en una serie de casos, cosa simple. Se necesita cierta intelectiva y, desde luego, práctica en la resolución de un gran número de problemas.

Así pues, nos hemos familiarizado con las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ y $0\cdot\infty$. Existen también otras indeterminaciones. Las conoceremos después de considerar la regla de L'Hospital.

Ejercicios. Hállese: 1. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$. (*Resp.* 10.) 2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{2}{3}.\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. (*Resp.* 1.) 4. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{5}.\right)$ 5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{sen}4x}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ 6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\cos 2x}$. $\left(\textit{Resp. } -\frac{1}{\sqrt{2}}.\right)$ 7. $\lim\limits_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$. (*Resp.* -12.) 8. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$. (*Resp.* -1.) 9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$. (*Resp.* 4.) 10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\operatorname{sen}x}$. (*Resp.* 2.) 11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ 12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}7x}{\sqrt{x+1}-1}$. (*Resp.* 14.) 13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{2x}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ 14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{\sqrt{1+x\operatorname{sen}x}-\cos x}$. (*Resp.* 9.) 15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\operatorname{sen}(x-1)}$. (**Indicación:** hacer la sustitución $x-1=y$.) (*Resp.* 3.) 16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{3}.\right)$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$. (*Resp.* 3.) **18.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{3}.\right)$ **19.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4})$. (*Resp.* 3.) **20.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$. $\left(Resp.\ -\frac{3}{2}.\right)$ **21.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{2}.\right)$ **22.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-a^2})$. (*Resp.* 0.) **23.** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$. (*Resp.* 1.) **24.** $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \times \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$. (*Resp.* x.) **25.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$. (*Resp.* $-\infty$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese que la función $f(x) = \cos x$ es continua en todo punto x.
2. ¿Por qué se puede afirmar que la función $f(x) = \frac{x^5+x^4+x^3-5}{x^2+5}$ es continua sobre toda la recta numérica?

§ 10. Definición y clasificación de los puntos de discontinuidad de una función

Definición. *El punto x_0 se llama punto de discontinuidad de la función $f(x)$, si $f(x)$ en el punto x_0 no es continua.*

Las discontinuidades de las funciones se clasifican del modo siguiente.

Discontinuidad de segunda especie. El punto x_0 se llama *punto de discontinuidad de primera especie* de la función $f(x)$, si en este punto la función $f(x)$ tiene límites derecho e izquierdo finitos, pero no iguales uno al otro:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

○ **Ejemplo.** Para la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ el punto $x = 0$ es un punto de discontinuidad de primera especie (véase la fig. 80), ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1. \ \bullet$$

Discontinuidad de primera especie. El punto x_0 se llama *punto de discontinuidad de segunda especie* de la función $f(x)$, si en este punto la función $f(x)$ no tiene al menos uno de los límites laterales o al menos uno de los límites laterales es infinito.

○ **Ejemplo.** Para la función $f(x) = 1/x$ el punto $x = 0$ es un

punto de discontinuidad de segunda especie (véase la fig. 123), ya que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \ \bullet$$

En el ejemplo 2, subp. 1 del § 8 hemos determinado que la función de Dirichlet no es continua en todo punto x_0 de la recta numérica y en el ejemplo 5, subp. 2 del § 2 hemos mostrado que la función de Dirichlet no tiene límite en todo punto x_0. Por consiguiente, nos queda sacar la conclusión de que en todo punto x_0 la función de Dirichlet tiene una discontinuidad de segunda especie.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué puntos se llaman puntos de discontinuidad de una función?
2. Dense las definiciones de los puntos de discontinuidad de primera y segunda especie.
3. Señálese en qué punto la discontinuidad tiene la función $f(x)=\frac{|x|}{x}$ y de qué especie es esta discontinuidad.

§ 11. Teorema de la continuidad de una función compuesta

Teorema 4.8. *Supongamos que la función $z=\varphi(x)$ es continua en el punto x_0 y la función $y=f(z)$ es continua en el punto $z_0 = \varphi(x_0)$. Entonces la función compuesta $y=f[\varphi(x)]$ es continua en el punto x_0.*

□ **Demostración.** Tomemos de X cualquier sucesión de los puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

que converja en el punto x_0. Entonces, en virtud de la continuidad de la función $z=\varphi(x)$ en el punto x_0, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = z_0,$$

o sea, la sucesión respectiva de los puntos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ converge hacia el punto z_0. Al mismo tiempo, en virtud de la continuidad de la función $f(z)$ en el punto z_0, resulta $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)].$$

Por consiguiente, el límite de la función $f[\varphi(x)]$ en el punto x_0 es igual al valor de la misma en este punto, lo que demuestra precisamente la continuidad de la función compuesta $f[\varphi(x)]$ en el punto x_0. ■

○ **Ejemplo.** Demuéstrese la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} x^2$ en el punto $x=0$.

Resolución. Puesto que la función $z = x^2$ es continua en el punto $x = 0$ y la función $y = \text{sen } z$ es continua en el punto $z = 0$, según el teorema demostrado la función compuesta $y = \text{sen } x^2$ es continua en el punto $x = 0$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la función compuesta.
2. Enúnciese el teorema de la continuidad de la función compuesta.
3. Demuéstrese la continuidad de la función $y = \text{sen } 3x$ sobre toda la recta numérica.

§ 12. Propiedades fundamentales de las funciones continuas

1. Teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua.

Teorema 4.9. *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todos los*

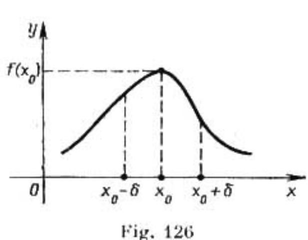


Fig. 126

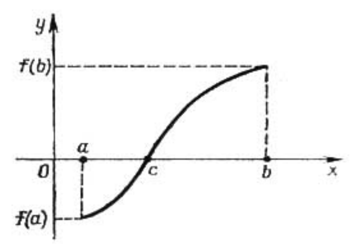


Fig. 127

puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la función $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

□ **Demostración.** Supongamos que $f(x_0) > 0$ (fig. 126). Entonces, en virtud de la segunda definición de la continuidad de una función, para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se cumple para todos los x que satisfacen la condición $|x - x_0| < \delta$ o bien, lo que es lo mismo, se cumplen las desigualdades

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{1}$$

para todos los puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tomemos $\varepsilon = f(x_0)$. Entonces de la desigualdad izquierda (1) obtenemos $f(x) > 0$ para todos los puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, que es lo que se quería demostrar.

En cambio si $f(x_0) < 0$, consideremos la función $-f(x)$. Puesto que $-f(x_0) > 0$, entonces, según lo demostrado, existe el δ-entorno del punto x_0 en el cual $-f(x) > 0$ y, por consiguiente, $f(x) < 0$. ■

2. Paso de una función continua por todo el valor intermedio. Consideremos el teorema del paso de una función continua por el valor nulo al cambiar los signos.

Teorema 4.10. (primer teorema de Bolzano — Cauchy)[1]. *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en los extremos del segmento tiene valores de signos opuestos. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual $f(c) = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (fig. 127). Dividamos el segmento $[a, b]$ por la mitad. Si el valor de la función en el punto medio del segmento $[a, b]$ es igual a cero, el teorema quedará demostrado. En el caso contrario elijamos entre los segmentos obtenidos el segmento en cuyos extremos la función tiene valores de signos opuestos y designémoslo por $[a_1, b_1]$. Bisequemos el segmento $[a_1, b_1]$, elijamos el segmento en cuyos extremos la función $f(x)$ tiene valores de signos opuestos y designémoslo por $[a_2, b_2]$, etc. Continuando este proceso indefinidamente, obtenemos la sucesión

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

de los segmentos encajados, con la particularidad de que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ para $n \to \infty$ y en los extremos de cada segmento $[a_n, b_n]$ la función tiene valores de signos opuestos.

Según el teorema 3.13 de los segmentos encajados existe el punto c perteneciente a todos los segmentos. Demuéstrese que $f(c) = 0$. Efectivamente, si admitimos que $f(c) > 0$, conforme al teorema 4.9 de la estabilidad del signo de una función continua existe el entorno del punto c en el cual $f(x) > 0$. Al ser n suficientemente grande en este entorno llegará a parar el segmento $[a_n, b_n]$ en el cual, por lo tanto, será $f(x) > 0$ y esto contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados. Análogamente se demuestra que $f(c)$ no puede ser menor que cero. Nos queda admitir que $f(c) = 0$. En este caso es evidente que el punto $c \in (a, b)$. ■

El teorema demostrado tiene un significado geométrico sencillo: al pasar de un semiplano, cuya frontera es el eje Ox, al otro la curva continua corta a este eje.

Téngase presente que al demostrar el teorema 4.10 hemos empleado el método de bisección de un segmento. A continuación utilizaremos reiteradamente este método.

Consideremos el teorema del paso de una función continua por cualquier valor intermedio.

Teorema 4.11 (segundo teorema de Bolzano — Cauchy). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que $f(a) = A$, $f(b) = B$. Supongamos, luego, que C es todo número comprendido entre A y B. Entonces sobre el segmento $[a, b]$ habrá un punto c tal que $f(c) = C$.*

[1]) B. Bolzano (1781—1848), matemático checo.

Con otras palabras, al pasar de un valor a otro, la función continua toma también todos los valores intermedios.

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que $A < B$ y $A < C < B$ (fig. 128). Consideremos una función auxiliar

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Esta función es continua sobre el segmento $[a, b]$ (como diferencia de las funciones continuas) y toma en los extremos de este segmento valores de signos opuestos:

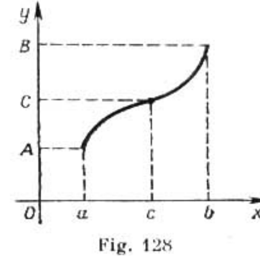


Fig. 128

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Conforme al teorema 4.10 existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, o sea, $f(c) - C = 0$. De aquí $f(c) = C$. ■

Corolario. *Si la función $f(x)$ está definida y es continua sobre cierto intervalo X, el conjunto de sus valores Y también es cierto intervalo.*

□ **Demostración.** Sea $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$, donde m y M son los números que se llaman, respectivamente, *cotas inferior exacta y superior exacta de la función* [1]).

Tomemos todo y de Y, no igual a m ni a M, y elijamos dos valores y_1 e y_2 de la función $f(x)$ de un modo tal que se cumplan las desigualdades $m \leqslant y_1 < y < y_2 \leqslant M$. La existencia de tales valores de la función $f(x)$ se deduce de la definición de las cotas exactas (si $M = +\infty$ ($m = -\infty$), entonces $y_2 < M$ ($m < y_1$)). En este caso según el teorema 4.11 de los valores intermedios de una función continua existe un punto x tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, el conjunto Y es cierto intervalo (finito o infinito) que tiene por extremos m y M, los cuales, según el caso concreto, pueden pertenecerle o no pertenecerle. ■

Los teoremas demostrados tienen gran importancia teórica y práctica.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la ecuación $x^5 - 18x + 2 = 0$ tiene una raíz sobre el segmento $[-1, 1]$.

Resolución. Pongamos $f(x) = x^5 - 18x + 2$. Esta función es continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y en sus extremos toma los valores de signos opuestos: $f(-1) = 19 > 0$, $f(1) = -15 < 0$. Por consiguiente, satisface las hipótesis del teorema 4.10, según el cual existe

---

[1]) Recuérdese que se llama cota superior (inferior) exacta de la función $f(x)$, definida sobre X, a la cota mínima (máxima) entre las cotas superiores (inferiores) que limitan Y por arriba (por abajo).

al menos un punto c $(-1 < c < 1)$ en el cual $f(c) = 0$. El número c es precisamente la raíz de la ecuación dada.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la función $f(x) = x^3/4 - \operatorname{sen} \pi x + 3$ toma un valor igual a 3, dentro del segmento $[-2, +2]$.

Resolución. La función dada satisface las hipótesis del teorema 4.11. Es continua sobre el segmento $[-2, +2]$ y en los extremos de este segmento toma distintos valores: $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$. Puesto que $1 < 3 < 5$, entonces, conforme al teorema 4.11, dentro del segmento $[-2, +2]$ *existe el punto* c *en* el cual la función toma el valor igual a 3, o sea, $f(c) = 3$. ●

3. Teorema del carácter acotado de una función continua sobre un segmento. Recuérdese que la función $f(x)$ se llama acotada sobre el segmento $[a, b]$ si existe un número $M > 0$ tal que para todos los puntos $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$ o bien $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, o sea, el gráfico de la función $f(x)$ no sale de la franja limitada por las rectas $y = M$ e $y = -M$ (fig. 129).

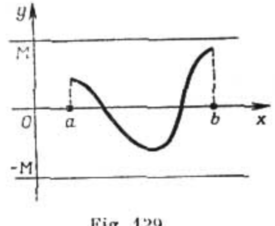


Fig. 129

Teorema 4.12 (primer teorema de Weierstrass) [1]. *Si la función* $f(x)$ *está definida y es continua sobre el segmento* $[a, b]$, *ella está acotada sobre este segmento.*

Demostremos previamente el siguiente lema.

Lema. *La función* $f(x)$, *continua en el punto* x_0, *está acotada en cierto entorno suyo.*

□ **Demostración.** Tomemos $\varepsilon = 1$. Entonces, conforme a la segunda definición de la continuidad de una función en un punto, para ε dado existe $\delta > 0$ tal que para todos los $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < 1$.

Utilizando esta desigualdad, obtenemos $|f(x)| = |(f(x) - - f(x_0)) + f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$, o sea, $|f(x)| < M$, donde $M = 1 + |f(x_0)|$. De aquí sacamos la conclusión de que la función $f(x)$ está acotada en el δ-entorno del punto x_0. ■

□ **Demostración del teorema.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que la función $f(x)$ no está acotada sobre el segmento $[a, b]$. Bisequemos el segmento $[a, b]$, entonces al menos sobre uno de los dos segmentos obtenidos la función $f(x)$ no está acotada (en el caso contrario ella estaría acotada sobre $[a, b]$). Designemos este segmento por $[a_1, b_1]$. Bisequemos el segmento $[a_1, b_1]$ y designemos por $[a_2, b_2]$ aquél de los segmentos sobre el cual la función $f(x)$ no está acotada, etc. Continuando este proceso indefinidamente,

[1] Karl Weierstrass (1815 — 1897), matemático alemán.

obtenemos la sucesión

$$[a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots$$

de los segmentos encajados, en cada uno de los cuales $f(x)$ no está acotada, con la particularidad de que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ para $n \to \infty$.

Conforme al teorema 3.13 de los segmentos encajados existe el punto c perteneciente a todos los segmentos. Según la hipótesis la función $f(x)$ está definida y es continua en el punto c, por lo tanto, según el lema demostrado, en cierto entorno del punto c ella está acotada. Cuando n es suficientemente grande, en este entorno se encuentra el segmento $[a_n,\ b_n]$ sobre el cual la función $f(x)$ también está acotada, lo que contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados. La contradicción obtenida demuestra el teorema. ■

Observación. El teorema no es cierto si el segmento $[a,\ b]$ se reemplaza por el intervalo $(a,\ b)$. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua sobre el intervalo $(0,\ 1)$, pero no está acotada, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

La demostración del teorema para el intervalo «no pasa» en el lugar, donde se afirma que en el punto c la función está definida y es continua. Para el intervalo el punto c puede coincidir con su extremo y entonces la función $f(x)$ no quedará definida ni será continua en el punto c.

4. Teorema acerca de cómo una función, que es continua sobre un segmento, alcanza sus cotas exactas. En el caso cuando las cotas exactas de una función son los valores de la misma, se dice que la función *alcanza sus cotas exactas*. Sin embargo, como se sabe (véase el teorema 1.1) no a todo conjunto pertenecen sus cotas exactas. El ejemplo siguiente muestra que las cotas exactas de una función no siempre se alcanzan.

○ Supongamos que en el segmento $[0,\ b]$, $b \geqslant 1$, está definida la función $f(x) = x - [x]$ cuyo gráfico está representado en la fig. 130. De conjunto de valores de la misma sirve el semiintervalo $[0,\ 1)$. La función está acotada superior e inferiormente y tiene sobre el segmento dado la cota superior exacta, igual a 1 y la cota inferior exacta, igual a 0. Es evidente que la función toma el valor igual a 0, pero no toma el valor igual a 1. Por lo tanto, se puede decir que la función alcanza su cota exacta inferior y no alcanza la superior exacta. ●

Surge la pregunta ¿cuál es la condición con la que la función alcanza sus cotas exactas? El siguiente teorema da la respuesta.

Teorema 4.13 (segundo teorema de Weierstrass). *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a,\ b]$, ella alcanza sobre este seg-*

mento sus cotas exactas, o sea, existen puntos x_1, $x_2 \in [a, b]$ tales que (fig. 131)

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,\, b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_{[a,\, b]} f(x).$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces, conforme al teorema 4.12, ella está acotada sobre este segmento. Por consiguiente, según el teorema 1.1

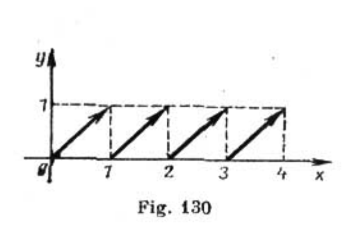


Fig. 130

Fig. 131

existen la cota superior exacta M y la cota inferior exacta m de la *función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.*

Mostremos que la función $f(x)$ alcanza M, o sea, existe tal punto $x_1 \in [a, b]$ que $f(x_1) = M$. Vamos a razonar mediante la reducción al absurdo. Supongamos que la función $f(x)$ no toma en ningún punto $[a, b]$ el valor igual a M. Entonces para todos los puntos $x \in [a, b]$ *es válida la desigualdad $f(x) < M$.*

Consideremos sobre el segmento $[a, b]$ una función auxiliar, positiva por doquier,

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Según el teorema 4.7 la función $F(x)$ es continua como cociente de dos funciones continuas. En este caso, conforme al teorema 4.12, la función $F(x)$ está acotada, o sea, habrá un número positivo μ tal que para todos los puntos $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu, \text{ de donde } f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

Se obtuvo que un número $M - 1/\mu$, menor que M, es la cota superior de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Pero esto contradice el hecho de que el número M es la cota superior exacta, o sea, la cota superior mínima de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que existe el punto $x_1 \in [a, b]$ en el cual $f(x_1) = M$.

De un modo análogo se demuestra que la función $f(x)$ alcanza sobre $[a, b]$ su cota inferior exacta m. ■

Observación. Una vez demostrado que la función $f(x)$, continua sobre el segmento $[a, b]$, alcanza sobre este segmento sus cotas exactas superior M e inferior m, la cota superior exacta puede llamarse *valor máximo* y la cota inferior exacta, *valor mínimo* de la función $f(x)$ sobre este segmento; entonces el teorema 4.13 se puede enunciar en la forma siguiente: *una función continua sobre un segmento tiene sobre este segmento los valores máximo y mínimo.*

○ **Ejemplo 3.** Demuéstrese que la función $f(x) = 2^{|x|} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} + (x^2 - 5x + 6) \operatorname{sen} \sqrt{x^2+1}$ está acotada sobre el segmento $[0, 1]$ y existen tales valores de x con los cuales la función toma sobre este segmento los valores máximo y mínimo.

Resolución. Puesto que las funciones $2^{|x|} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$, $(x^2 - 5x + 6)$, $\operatorname{sen} \sqrt{x^2+1}$ son continuas sobre el segmento $[0, 1]$, entonces, conforme al teorema 4.7, la función dada $f(x)$ es continua sobre este segmento. Por consiguiente, según el teorema 4.12 ella está acotada sobre el segmento $[0, 1]$ y según el teorema 4.13, existen sobre este segmento los valores x_1 y x_2 en los que la función toma el valor máximo $(f(x_1) = \sup\limits_{[0, 1]} f(x))$ y el valor mínimo $(f(x_2) = \inf\limits_{[0, 1]} f(x))$. ●

5. Concepto de continuidad uniforme de una función. La propiedad de *continuidad uniforme* es una propiedad importante de la función continua sobre un segmento. Esta propiedad se utiliza ampliamente para demostrar varios teoremas fundamentales.

Sea $f(x)$ una función continua sobre cierto intervalo X y sea el punto $x_0 \in X$. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0, entonces, según la segunda definición de continuidad, para todo número $\varepsilon > 0$ habrá $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. Está claro que δ depende de ε, pero δ depende también de x_0. Al variar x_0 dentro de los límites del intervalo en cuestión (al ser constante ε) el número δ es distinto para diferentes x_0. Cuanto «más abrupto» sea el gráfico de la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0, tanto menor será δ correspondiente a este punto (fig. 132).

De esta manera, para ε dado a cada punto x del intervalo en cuestión corresponde cierto número $\delta > 0$. Si hubiera un número finito de puntos, se podría del conjunto finito de los números δ elegir el número δ positivo mínimo que dependiera sólo de ε y fuera «útil» para todos los puntos x. Hablando en general, no se puede hacer esto para un número infinito de puntos, ya que a estos puntos corresponde un conjunto infinito de números δ, entre los cuales también pueden haber tan pequeños como se quiera.

Surge la pregunta ¿existen o no funciones continuas, definidas sobre ciertos intervalos, para las cuales según todo número $\delta > 0$

se podría hallar $\varepsilon > 0$ no dependiente de x, o sea, δ sería común para todos los puntos x del intervalo en cuestión. Esta pregunta conduce al concepto de continuidad uniforme de una función.

Definición. *La función $f(x)$ se llama uniformemente continua sobre cierto intervalo X, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos $x', x'' \in X$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.*

Por definición, δ depende sólo de ε y es común para todos los puntos x', x'' del intervalo X.

El concepto de continuidad uniforme de una función pertenece a los problemas más complicadas y difíciles de comprender del análisis matemático.

El concepto de continuidad uniforme de una función sobre el intervalo X se distingue del de continuidad sobre este intervalo

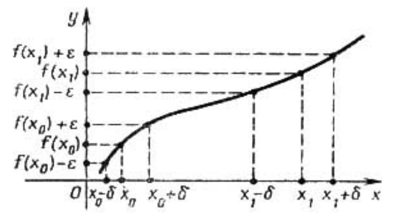


Fig. 132

por el hecho de que la magnitud δ depende sólo de ε y no depende de x (para todo número $\varepsilon > 0$ existe un «propio» número $\delta > 0$, común para todos los puntos $x \in X$), mientras que en caso de una continuidad «ordinaria» δ depende de ε y de x. En este caso, como hemos mostrado anteriormente, δ en dependencia de x puede tomar valores tan pequeños como se quiera.

De la definición de continuidad uniforme se desprende que si la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre cierto intervalo X, ella es también verdaderamente continua sobre este intervalo, o sea, continua en todo punto $x_0 \in X$. En efecto, tomando en la definición como x' el punto fijo dado $x_0 \in X$ y como x'' todo punto de este intervalo, llegaremos a la definición de continuidad de la función $f(x)$ en el punto x_0. La afirmación inversa no es cierta (piense ¿por qué?).

Consideremos los ejemplos de las funciones que poseen o no poseen la propiedad de continuidad uniforme sobre el intervalo dado X.

○ **Ejemplo 4.** Utilizando la definición de continuidad uniforme, demuéstrese que la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$.

Resolución. El gráfico de la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ está representado en la fig. 121. La función es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, *pero no es uniformemente continua sobre éste.* Para convencerse de esto basta demostrar que para cierto número $\varepsilon > 0$ y para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera existe al menos un par de puntos x' y x'' del intervalo $(0, 1)$ tales que $|x'' - x'| < \delta$, pero $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon = 1$ y consideremos dos sucesiones de puntos pertenecientes al intervalo $(0, 1)$, o sea, $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ con elementos generales

$$x'_n = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{y} \quad x''_n = 1\Big/\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

con la particularidad de que $f(x''_n) = 1$ y $f(x'_n) = -1$. Ambas estas sucesiones y, por lo tanto, sus diferencias son infinitamente pequeñas. *Por eso para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera existe un número de orden n tal que* $|x''_n - x'_n| < \delta$, mientras que para todo número de orden n

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Esto demuestra precisamente que la función en cuestión no es uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$.

Ejemplo 5. Utilizando la definición de continuidad uniforme, demostrar que *la función $f(x) = x$ es uniformemente continua sobre* toda la recta numérica.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Entonces de la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se deduce la desigualdad $|f(x'') - f(x')| = |x'' - x'| < \varepsilon$, que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 6. Utilizando la definición de continuidad uniforme, demuéstrese que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica [1]).

Resolución. Para cerciorarse de esto basta mostrar que para cierto número $\varepsilon > 0$ y para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera habrá al menos un par de puntos x' y x'' tales que

$$|x'' - x'| < \delta, \text{ pero } |f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon.$$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y consideremos dos sucesiones de puntos $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ que tienen por elementos generales $x'_n = \sqrt{n}$ y $x''_n = \sqrt{n+1}$

[1]) *Aunque esta función es continua en cada punto de la recta numérica.*

$(n = 1, 2, \ldots)$. Entonces

$$|x_n'' - x_n'| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

para $n \to \infty$ y

$$|f(x_n'') - f(x_n')| = |x_n''^2 - x_n'^2| = n + 1 - n = 1.$$

Por consiguiente, para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera habrá un par de puntos x_n' y x_n'' tales que $|x_n'' - x_n'| < \delta$, mientras que $|f(x_n'') - f(x_n')| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ y esto demuestra precisamente que la función en cuestión no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica. ●

El teorema siguiente determina la condición en la que una función continua es también uniformemente continua.

6. Teorema de la continuidad uniforme de una función. Teorema 4.14 (teorema de Cantor) [1]. *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, ella también es uniformemente continua sobre éste.*

□ **Demostración.** Demostremos primero que si la función $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces para todo número $\varepsilon > 0$ el segmento $[a, b]$ puede partirse en un número finito de segmentos, dos cualesquiera de los cuales o no tienen puntos comunes o tienen sólo un punto de frontera común y sobre cada uno de los cuales para cualesquiera dos puntos x' y x'' se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que exista $\varepsilon > 0$ para el cual tal partición del segmento $[a, b]$ no es posible. Bisequemos el segmento $[a, b]$ y elijamos aquél de los segmentos para el cual tal partición es imposible. Designémoslo por $[a_1, b_1]$. Bisequemos ahora el segmento $[a_1, b_1]$ y escojamos aquél de los segmentos para el cual tal partición es imposible, etc. Continuando este proceso indefinidamente, obtenemos la sucesión de los segmentos encajados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

que poseen la propiedad de que ninguno de ellos se puede partir en un número finito de segmentos, en cada uno de los cuales se cumple para cualesquiera dos puntos x y x'' la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Conforme al teorema 3.13 de los segmentos encajados existe un punto c perteneciente a todos los segmentos. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el punto c, para un número ε dado habrá δ tal que $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo punto x del δ-entorno del

[1]) Georg Cantor (1845 — 1918), matemático alemán, fundador de la moderna teoría de los conjuntos.

punto c. Entonces para cualesquiera dos puntos x' y x'' del **δ-entorno** del punto c se cumple la desigualdad

$$|f(x'')-f(x')| = |(f(x'')-f(c))+(f(c)-f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-f(c)|+|f(c)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad \varepsilon,$$

o sea,

$$|f(x'')-f(x')| < \varepsilon.$$

Al δ-entorno del punto c, al ser suficientemente grande n, va a parar el segmento $[a_n, b_n]$ y, por consiguiente, para todos dos puntos x y x'' de este segmento es válida la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$, lo que contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados.

Pasemos ahora inmediatamente a la demostración del teorema. Según lo recién demostrado, para todo número $\varepsilon > 0$ existe la partición del segmento $[a, b]$ en un número finito de segmentos, en cada uno de los cuales la diferencia entre cualesquiera dos valores de la función $f(x)$ es, en valor absoluto, menor que $\varepsilon/2$. Designemos con δ la longitud del menor entre los segmentos de partición y consideremos cualesquiera dos puntos x' y x'' del segmento $[a, b]$ que estén alejados uno de otro a una distancia menor que δ, o sea, $|x''-x'| < \delta$. Son posibles dos casos: 1) los puntos x' y x'' pertenecen a un mismo segmento de partición; 2) los puntos x' y x'' pertenecen a dos segmentos de partición vecinos. En el primer caso $|f(x'')-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; en el segundo caso, designando por x_0 el punto común de frontera tenemos

$$|f(x'')-f(x')| = |(f(x'')-f(x_0))+(f(x_0)-f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así pues, para todo número $\varepsilon > 0$ habrá $\delta > 0$ tal que para dos puntos cualesquiera x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la desigualdad $|x''-x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$, tal como se quería demostrar. ■

Observación. El teorema no es cierto si el segmento $[a, b]$ se reemplaza por el intervalo o semiintervalo.

○ **Ejemplo.** Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre el intervalo $(0, 1)$. La función dada es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, pero no es uniformemente continua sobre éste. Esto se desprende del hecho de que para todo número fijo $\varepsilon > 0$, cualquiera que se tome $\delta > 0$, siempre habrá puntos x' y x'' suficientemente próximos a cero,

la distancia entre los cuales es menor que δ y el módulo de la diferencia $|f(x'') - f(x')|$, menor que ε (fig. 133). ●

El teorema de Cantor ofrece la posibilidad de afirmar de una vez que la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre el segmento

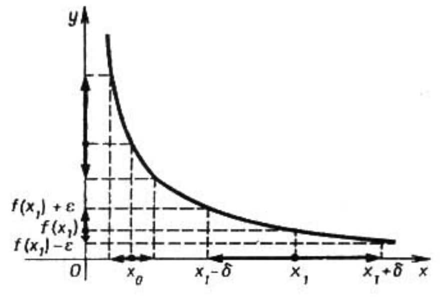


Fig. 133

$[a, b]$, si queda determinada la continuidad de la función sobre este segmento.

○ **Ejemplo 7.** Demuéstrese que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$ [1]), haciendo esto por dos métodos: 1) utilizando el teorema de Cantor; 2) utilizando la definición de la continuidad uniforme.

Resolución. Método I. Consideremos la función $f(x) = x^2$ sobre el segmento $[-1, 1]$. Ella es continua sobre este segmento y, por consiguiente, conforme al teorema de Cantor, es uniformemente continua sobre éste. De aquí se desprende que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$. En efecto, el intervalo $(-1, 1)$ es un subconjunto del segmento $[-1, 1]$, o sea, $(-1, 1) \subset [-1, 1]$ y puesto que la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ se cumple para cualesquiera $x', x'' \in [-1, 1]$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$, entonces ella se cumple también para cualesquiera $x', x'' \in (-1, 1)$ que satisfacen la misma desigualdad, tal como se quería demostrar.

Método II. Tomemos dos puntos cualesquiera x' y x'' del intervalo $(-1, 1)$. Entonces

$$|f(x'') - f(x')| = |x''^2 - x'^2| = |(x'' + x')(x'' - x')| = |x'' + x'|\,|x'' - x'| < 2\,|x'' - x'|,$$

ya que el módulo de la suma $|x'' + x'|$ está limitado por el número 2.

---

[1]) Aunque esta función no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica (véase el ejemplo 6).

Tomemos ahora todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces para todos $x', x'' \in (-1, 1)$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < 2\cdot\delta = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa precisamente, según la definición de la continuidad uniforme, que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$. ●

En conclusión nótese que el teorema de Cantor tiene una *importancia teórica primordial. Con su ayuda ha sido demostrada una* serie de teoremas fundamentales.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de la estabilidad del signo de una función continua.
2. ¿Se puede afirmar que si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) = 0$, la función $f(x)$: a) tiene un signo determinado en cierto entorno del punto x_0; b) no tiene un signo determinado en ningún entorno del punto x_0? Cítense los ejemplos respectivos.
3. Enúnciese el primer teorema de Bolzano — Cauchy.
4. ¿Se puede afirmar que si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en los extremos del segmento tiene valores de un mismo signo, entonces sobre $[a, b]$ no hay tal punto en el cual la función se anule? Cítese un ejemplo.
5. Enúnciese el primer teorema de Weierstrass.
6. ¿Puede una función continua sobre un intervalo estar acotada sobre este intervalo?
7. *¿Puede una función no acotada sobre un segmento o sobre un intervalo* ser continua sobre estos intervalos?
8. ¿Puede una función acotada sobre un segmento tomar los valores de sus cotas exactas?
9. Enúnciese el segundo teorema de Weierstrass.
10. *¿Puede una función continua sobre un intervalo alcanzar sobre este* intervalo sus cotas exactas?
11. Dése la definición de concepto de continuidad uniforme de una función.
12. ¿En qué consiste la distinción entre el concepto de continuidad uniforme y el de continuidad de una función?
13. *Enúnciese el teorema de Cantor.*
14. ¿Puede una función continua sobre un intervalo ser uniformemente continua sobre este intervalo y, viceversa, puede una función uniformemente continua sobre un intervalo ser continua?
15. ¿Es la función $f(x) = x^2$ uniformemente continua sobre el intervalo $(1, 5)$?

§ 13. Teorema de la continuidad de una función inversa

Introduzcamos varios conceptos preliminares. Diremos que la función $f(x)$ *no decrece* (*no crece*) sobre el conjunto X si para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Las funciones no decrecientes y no crecientes llevan el nombre común de *funciones monótonas.*

Si para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, entonces la función $f(x)$ se llama *creciente* (*decreciente*) sobre el conjunto X. Las funciones crecientes y decrecientes se llaman también *estrictamente monótonas.*

○ **Ejemplos. 1.** La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ es no decreciente sobre toda la recta numérica.

2. La función $f(x) = x$ es creciente sobre toda la recta numérica. ●

Teorema 4.15. *Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida, es estrictamente monótona y continua sobre cierto intervalo X y sea Y*

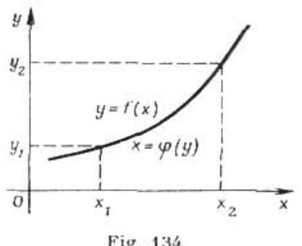


Fig. 134

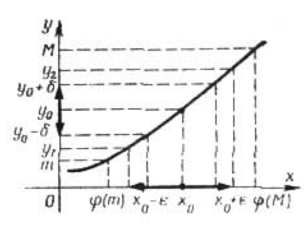


Fig. 135

el conjunto de sus valores. Entonces sobre el conjunto Y la función inversa $x = \varphi(y)$ es unívoca, estrictamente monótona y continua.

□ **Demostración**. Supongamos, para precisar, que la función $f(x)$ crece sobre X, o sea, para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición de que $x_1 < x_2$ se cumple la desigualdad $y_1 < y_2$ $(y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2))$ (fig. 134).

La univocidad de la función inversa $x = \varphi(y)$ se deduce del hecho de que en virtud del crecimiento de la función $y = f(x)$ sobre X es válida la desigualdad $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ para $x_1 \neq x_2$ y, y, por lo tanto, a cada $y \in Y$ corresponde el único valor de $x \in X$.

Demostremos ahora que la función inversa $x = \varphi(y)$ crece sobre Y. *Efectivamente, si $y_1 < y_2$, entonces también $x_1 < x_2$* $(x_1 = \varphi(y_1)$ y $x_2 = \varphi(y_2))$, ya que si existiera $x_1 \geqslant x_2$, del crecimiento de $f(x)$ se deduciría que $y_1 \geqslant y_2$, lo que contradiría la suposición de que $y_1 < y_2$. Por lo tanto, el hecho de que la función inversa $x = \varphi(y)$ es estrictamente monótona queda establecido.

Y, por último, mostremos que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre Y. En virtud del corolario del teorema 4.11 el conjunto Y es un intervalo que tiene por extremos m y M, donde $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$. Sea $y_0 \in Y$, $x_0 = \varphi(y_0)$. Consideremos primero el caso cuando $m < y_0 < M$ (fig. 135). En este caso el

punto x_0 es, evidentemente, el punto interior del intervalo en sentido lato X.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $(x_0 - \varepsilon) \in X$ y $(x_0 + \varepsilon) \in X$ y pongamos $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ e $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Entonces, en virtud del crecimiento de la función $f(x)$, resulta

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que se cumplan las desigualdades $y_1 \leqslant y_0 - \delta$ e $y_0 + \delta \leqslant y_2$. *En este caso, si y satisface las desigualdades*

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

entonces

$$y_1 < y < y_2$$

y, por lo tanto, en virtud de crecimiento de $\varphi(y)$, tenemos

$$\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2).$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$ y $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, obtenemos $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$, a condición de que $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.

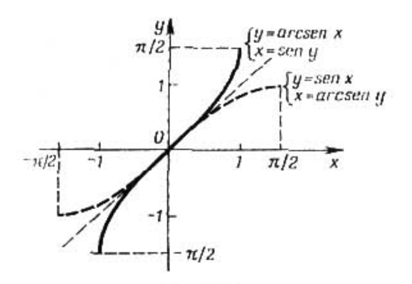


Fig. 136

Así pues, queda demostrado que para todo número suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos y que satisfacen la desigualdad $|y - y_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, o sea, la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua en el punto y_0. Pero y_0 es un punto arbitrario del intervalo (m, M). Esto quiere decir que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre (m, M).

Si $m \in Y$ o $M \in Y$, entonces, razonando de un modo análogo, se puede demostrar la continuidad de $\varphi(y)$ por la derecha en el punto m y por la izquierda en el punto M.

Por consiguiente, queda demostrado el hecho de que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre Y.

En caso de decrecimiento de la función $f(x)$ el teorema se demuestra de un modo análogo. ■

Observación. Si la función inversa $x = \varphi(y)$ es unívoca, entonces, evidentemente, la función $y = f(x)$ es inversa para la función $x = \varphi(y)$. Tales funciones se llaman también *recíprocamente inversas*.

○ **Ejemplo.** La función $y =$ sen x sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ crece, es continua y de conjunto de sus valores sirve el segmento $[-1, 1]$. Conforme al teorema 4.15 sobre el segmento $[-1, 1]$ existe una función inversa, continua y creciente, con el conjunto de los valores $[-\pi/2, \pi/2]$. Esta función inversa se designa $x =$ arcsen y. Su gráfica coincide con a de la función $y =$ sen x que se considera para $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (fig. 136).

Si ahora x e y se cambian de lugar, o sea, si se considera la función $y =$ arcsen x, obtenemos la gráfica representada en la fig. 136 con línea continua. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Cítese un ejemplo de la función no monótona.
2. Dése la definición de la función inversa.
3. ¿En qué se diferencia una función de una función inversa? Ilústrese esto geométricamente.
4. ¿En qué caso una función inversa es una función en sentido corriente y qué se deduce de esto?
5. Enúnciese el teorema de la continuidad de la función inversa.
6. Hállese la función que es inversa a la función $y =$ cos x dada sobre el segmento $[0, \pi]$. Determínese el dominio de definición y el conjunto de los valores de la función inversa y dibújese su gráfica.
7. ¿Se puede considerar la función $y =$ sen x como inversa a la función $y =$ arcsen x?

5

CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1. Concepto de derivada

1. Definición de la derivada. Supongamos que sobre cierto intervalo X está definida la función $y = f(x)$. Tomemos todo punto $x_0 \in X$ y asignemos al argumento x en el punto x_0 un incremento arbitrario Δx tal que el punto $x_0 + \Delta x$ también pertenezca a X. La función obtiene el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Definición. *La derivada de una función $y = f(x)$ en el punto x_0 es para $\Delta x \to 0$ el límite de la razón entre el incremento de la función en este punto y el del argumento (a condición de que este límite exista).*

Para designar la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 se utilizan los símbolos $y'(x_0)$ o $f'(x_0)$ (se lee: «i griega prima en el punto x_0» o bien «efe prima en el punto x_0»).

Así pues, por definición,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Si para cierto valor x_0 se cumple la condición

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \left(\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \right),$$

se dice que en el punto x_0 la función tiene una derivada infinita de signo más (o de signo menos). A diferencia de la derivada infinita la derivada de la función antes definida se denomina, a veces *derivada finita.*

Si la función $f(x)$ tiene una derivada finita en cada punto $x \in X$. La derivada $f'(x)$ puede considerarse como función de x, también definida sobre X.

De la definición de la derivada se deduce también el método de su cálculo.

○ **Ejemplo 1.** Hállese la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = x_0$.

Resolución. Asignando al argumento x en el punto x_0 el incremento Δx, determinemos el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Escribamos la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Hállese el límite de esta razón para $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Por lo tanto, la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto x_0 es igual al número $2x_0$, lo que en las designaciones adoptadas puede escribirse así: $f'(x_0) = 2x_0$. ●

Ejercicios. Utilizando la definición de la derivada, hallar las derivadas de las funciones siguientes en el punto $x = x_0$: **1.** $f(x) = 5x^2$. (*Resp.* $10x_0$.) **2.** $f(x) = x^3$. (*Resp.* $3x_0^2$.) **3.** $f(x) = \sqrt{x}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\right)$ **4.** $f(x) = \frac{1}{x}$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{x_0^2}.\right)$ **5.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\left(Resp.\ -\frac{2}{x_0^3}.\right)$ **6.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}.\right)$ **7.** $f(x) = \operatorname{sen} 2x$. (*Resp.* $2\cos 2x_0$.) **8.** $f(x) = \cos\frac{x}{2}$. $\left(Resp.\ -\frac{\operatorname{sen} x_0/2}{2}.\right)$ **9.** $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. $\left(Resp.\ -\frac{2}{(2x_0+1)^2}.\right)$ **10.** $f(x) = \sqrt{1+3x}$. $\left(Resp.\ \frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}\right)$.

2. Significado geométrico de la derivada. Supongamos que la función $f(x)$ está definida y es continua sobre el intervalo (a, b). Sea, luego, que el punto M en la gráfica de la función corresponde a cierto valor del argumento x_0 y el punto P, al valor $x_0 + \Delta x$, donde Δx es el incremento del argumento. Tracemos por los puntos M y P la recta y llamémosla *secante*. Designemos con $\varphi(\Delta x)$ el ángulo entre la secante y el eje Ox (fig. 137). Es evidente que este ángulo depende de Δx. Llamaremos *tangente S a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto M* la posición límite de la secante MP siempre que el punto P se aproxime indefinidamente en la gráfica al punto M (o bien, que es lo mismo, para $\Delta x \to 0$). De la fig. 137 se deduce que

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Puesto que para $\Delta x \to 0$ la secante MP se convierte en tangente, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \operatorname{tg}\varphi_0,$$

donde φ_0 es el ángulo que la tangente forma con el eje Ox. Por otro lado,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Por consiguiente, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_0$. Ahora bien, la *función derivada* $f(x)$ *en el punto* x_0 *es igual al coeficiente angular* (pendiente) de la tangente a la gráfica de la función $f(x)$ *en el punto* $M(x_0; f(x_0))$.

○ **Ejemplo 2.** Hállese la pendiente de la tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$ y el ángulo comprendido entre la tangente en este punto y el eje Ox.

Resolución. Puesto que la pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$ es igual al valor de la

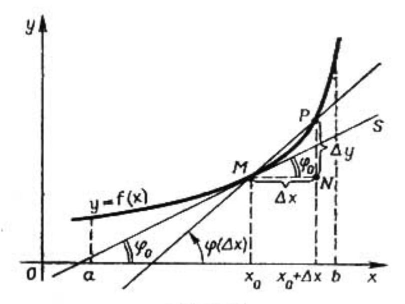


Fig. 137

derivada de esta función en el punto $x_0 = 1/2$, el problema se reduce precisamente a la determinación del valor de la derivada en este punto.

Antes hemos determinado (véase el ejemplo 1) que $f'(x_0) = (x^2)'|_{x=x_0} = 2x_0$. Sustituyendo $1/2$ en vez de x_0, obtenemos $f'(1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$. Por consiguiente, la pendiente de la tangente es igual a 1, o sea, $k = 1$ o bien $\operatorname{tg} \varphi_0 = 1$ (φ_0 es el ángulo comprendido entre la tangente y el eje Ox), de donde obtenemos el ángulo buscado: $\varphi_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. ●

Si en cierto punto la derivada es igual a cero ($k = 0$), la tangente a la gráfica de la función en este punto es paralela al eje Ox y en cambio, si la derivada se convierte en infinito ($k = \infty$), esto quiere decir que la tangente en este punto es paralela al eje Oy.

○ **Ejemplo 3.** Plantéese la ecuación de la tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$.

Resolución. Para formar la ecuación buscada de la tangente basta escribir la ecuación de la recta (conocida de la geometría analítica) que pasa por el punto dado $M(x_0; y_0)$ y tiene por coeficiente angular k

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

y en vez de k sustituir el valor de la función derivada $f'(x_0)$. Sustituyendo en la ecuación las coordenadas del punto $M(1/2; 1)$ y el

valor de la función derivada $f'(x_0) = f'(1/2) = 1$ (véase el ejemplo 1), obtenemos la ecuación de la tangente buscada

$$y-1=1\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ o bien } y=x+\frac{1}{2}. \quad \bullet$$

Ejercicio. Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $f(x) = 4 - x^2$ en el punto de intersección de la misma con el eje Ox para $x > 0$. Constrúyase la parábola y la tangente. (*Resp.* $y = -4x + 8$.)

○ **Ejemplo 4.** Escríbase la ecuación de la tangente trazada del punto $M(1; -3)$ a la parábola $f(x) = x^2$.

Resolución. La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $(x_0; f(x_0))$ tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Puesto que $f(x_0) = x_0^2$, $f'(x_0) = 2x_0$ (véase el ejemplo 1) y esta recta pasa por el punto $(x; y) = (1; -3)$, de (1) resulta

$$-3 - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0).$$

De esta ecuación encontramos $x_0 = -1$ o bien $x_0 = 3$.

Si $x_0 = -1$, entonces $f(x_0) = x_0^2 = 1$, $f'(x_0) = 2x_0 = -2$ y la ecuación de la tangente toma la forma $y - 1 = -2(x + 1)$, o sea, $y = -2x - 1$.

Si $x_0 = 3$, entonces $f(x_0) = 9$, $f'(x_0) = 6$ y la ecuación de la tangente es tal: $y = 6x - 9$.

Ahora bien, por el punto $M(1; -3)$ se pueden trazar dos tangentes a la parábola dada. ●

Ejercicio. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x}$ que pasan por el punto $(2; 3/2)$. $\left(Resp.\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{4}x+1.\right)$

Nótese que el significado geométrico de la derivada desempeña gran papel en la aclaración de muchos conceptos del análisis matemático y en la resolución de una serie de problemas geométricos.

3. Significado físico de la derivada. Supongamos que la función $y = f(t)$ describe la ley de movimiento de un punto material M sobre la línea recta, o sea, $y = f(t)$ es el camino recorrido por el punto a partir del punto de referencia durante el tiempo t.

Entonces durante el tiempo t_0 el camino recorrido es $y = f(t_0)$ y durante el tiempo t_1, el camino es $y = f(t_1)$. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ el punto M recorrerá el segmento del camino $\Delta y = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ (fig. 138). La razón $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ se llama *velocidad media del movimiento* (v_{med}) durante el tiempo Δt,

y el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ para $\Delta t \to 0$ determina la *velocidad instantánea* del punto en el instante de tiempo t_0 (v_{inst}).

○ **Ejemplo 5.** Hállese en el instante de tiempo t_0 las velocidades media e instantánea de un punto cuyo movimiento rectilíneo se da por la ecuación $y = \sqrt{t}$ (donde y es el camino; t, el tiempo, $t \geqslant 0$).

Resolución. Durante el tiempo t_0 el punto recorrerá el camino $y = \sqrt{t_0}$ y durante el tiempo t_1, el camino $y = \sqrt{t_1}$. En el lapso

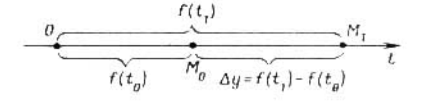


Fig. 138

$\Delta t = t_1 - t_0$ el punto recorrerá el segmento del camino $\Delta y = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_0} = \sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}$. Entonces la velocidad media de movimiento del punto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t}$$

y la velocidad instantánea del movimiento en el instante de tiempo t_0

$$v_{\text{inst}} = y'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0})(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})}{\Delta t (\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0 + \Delta t) - t_0}{\Delta t (\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}. \quad \bullet$$

El concepto de velocidad, tomado de la física, es cómodo al investigar el comportamiento de una función arbitraria. Cualquiera que sea la dependencia expresada por la función $y = f(x)$, la razón $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ es la velocidad media de variación de y respecto a la variación de x e $y'(x_0)$ es la velocidad instantánea de variación de y para cierto $x = x_0$.

○ **Ejemplo 6.** Hállese la velocidad de un cuerpo en caída libre en el vacío en cierto instante fijo de tiempo t.

Resolución. De la física se conoce que la ley de la caída libre de un cuerpo en el vacío se define por la fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$, donde g es una magnitud constante. Asignemos a cierto valor de t el incre-

mento Δt; entonces el camino recorrido s obtendrá el incremento

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}.$$

La velocidad media de la caída del cuerpo en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$ es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = \frac{1}{2} g(2t+\Delta t)$$

y la velocidad de la caída del cuerpo en el instante de tiempo t

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g(2t+\Delta t) = gt.$$

De aquí se deduce, en particular, que la velocidad de un cuerpo en caída libre es proporcional al tiempo de movimiento (de caída). ●

La importancia de la derivada consiste en que al estudiar todos los procesos y fenómenos de la naturaleza con su ayuda se puede estimar la velocidad de variación de las magnitudes vinculadas entre sí.

4. Derivadas a la derecha y a la izquierda. Por analogía con el concepto de límite derecho e izquierdo de la función se introducen los conceptos de las derivadas derecha e izquierda de las funciones $f(x)$ en el punto x_0.

Definición. *Se llama derivada derecha (izquierda) de la función $f(x)$ en el punto x_0 al valor límite derecho (izquierdo) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (a condición de que este valor límite exista).*

Designación: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

Si la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 una derivada, ella tiene en este punto las derivadas a la derecha y a la izquierda que coinciden entre sí.

Al mismo tiempo existen funciones que tienen en el punto dado x_0 las derivadas derecha e izquierda pero no tienen la derivada en este punto. De ejemplo de tal función puede servir la función $f(x) = |x|$. Esta función tiene en el punto $x=0$ la derivada a la derecha igual a $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ (para $x \geqslant 0$ $\Delta y = \Delta x$) y la derivada a la izquierda igual a $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ (para $x<0$ $\Delta y = -\Delta x$), pero no tiene en el punto $x=0$ una derivada, ya que $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, o sea, los límites laterales son distintos (véase el teorema 4.2). Geométricamente esto significa que la gráfica de la función $f(x) = |x|$ en el punto $O(0; 0)$ no tiene una tangente.

Ejercicio. Mostrar que la función $f(x) = 3|x| + 1$ no tiene una derivada en el punto $x = 0$.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dese la definición de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0
2. ¿Cuál es el significado geométrico de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0?
3. Dese la definición de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0;\ f(x_0))$ y escriba la ecuación de la tangente.
4. ¿Cuál es el significado físico de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0?
5. Dé la definición de la derivada derecha (izquierda) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. ¿Qué relación existe entre las derivadas laterales y la derivada de la función en el punto x_0? Cite un ejemplo de la función en la cual existen las derivadas derecha e izquierda en cierto punto, pero no existe la derivada en este punto.

§ 2. Concepto de derivabilidad de una función

1. Concepto de derivabilidad de una función en un punto dado. **Definición.** *La función $f(x)$ se llama derivable en el punto x_0 si su incremento Δy en este punto se puede representar en la forma*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \qquad (1)$$

donde A es cierto número que no depende de Δx y $\alpha(\Delta x)$, la función del argumento Δx la cual es infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$, o sea, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Aclaremos ahora la relación existente entre la derivabilidad en un punto y la existencia de la derivada en este mismo punto.

Teorema 5.1. *Para que la función $f(x)$ sea derivable en un punto dado x_0 es necesario y suficiente que ella tenga en este punto una derivada finita.*

□ **Demostración. Necesidad.** Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en el punto dado x_0, o sea $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$. Entonces, suponiendo que $\Delta x \neq 0$ y dividiendo la igualdad por Δx, resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A = f'(x_0).$$

De aquí se desprende que la derivada en el punto x_0 existe.

Suficiencia. Supongamos que existe la derivada $f'(x_0)$, o sea, existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Sea $f'(x_0) = A$. Entonces la función $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ es infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$ (véase el

teorema 4.5). De la última igualdad tenemos

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Hemos obtenido la representación (1) y de este modo queda demostrado que la función $f(x)$ es derivable en el punto x_0. ■

Ahora bien, para las funciones de una variable la derivabilidad y la existencia de la derivada son conceptos equivalentes. Por eso la operación con la cual se halla la derivada se llama *derivación*.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición, demostrar que la función $f(x) = x^2$ es derivable en el punto $x = x_0$.

Resolución. Escribamos el incremento de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = x_0$ en la forma (1):

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x = 2x_0\,\Delta x + \\ + \alpha(\Delta x)\,\Delta x \; (A = f'(x_0))$$

(véase el teorema 5.1).

Es necesario mostrar que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Para esto escribamos el incremento de la función en el punto x_0 por otro método:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Igualando los segundos miembros, obtenemos $\alpha(\Delta x) = \Delta x$. Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, encontramos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, lo que se quería mostrar. ●

Ejercicio. Utilizando la definición, mostrar que la función $f(x) = x^3$ es derivable en el punto $x = x_0$.

2. Relación existente entre los conceptos de derivabilidad y de continuidad.

Teorema 5.2. *Si la función $y = f(x)$ es derivable en un punto dado x_0, ella también es continua en este punto.*

□ **Demostración.** Puesto que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto x_0, su incremento en este punto puede ser representado por la relación (1). Entonces, pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

lo que significa precisamente que la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0 conforme a la tercera definición de la continuidad de una función en el punto x_0. ■

Observación. La afirmación inversa no es justa. Una función puede ser continua en un punto, pero no tener una derivada en este punto.

○ De ejemplo de tal función sirve la función $f(x) = |x|$. Como es sabido, esta función es continua en el punto $x = 0$, pero, según se muestra en el subp. 4 del § 1, no tiene una derivada en este punto, o sea, no es derivable.

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua sobre toda la recta numérica. Mostremos que en el punto $x = 0$ esta función no es derivable. En efecto, en el punto $x = 0$ al incremento del argumento Δx le corresponde el incremento de la función $\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}$. Por consiguiente.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Esto quiere decir que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x = 0$ no tiene una derivada finita, o sea, no es derivable. La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $O(0, 0)$ tiene por su tangente el eje Oy cuya pendiente $k = \operatorname{tg} \varphi_0$ no tiene un valor finito, o sea, «se *convierte en infinito*». ●

Si la función $f(x)$ tiene una derivada en cada punto de cierto intervalo en sentido lato (es derivable en cada punto de este intervalo), diremos que la función $f(x)$ tiene una derivada o que es derivable sobre el intervalo indicado.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la derivabilidad de una función en el punto x_0.
2. ¿Cuál es la relación entre el concepto de derivabilidad de la función en un punto y el de derivada de la función en este punto? Demuéstrese el teorema correspondiente.
3. *¿Cuál es la relación entre el concepto de derivabilidad de la función en* un punto y el de continuidad de la misma en este punto? Cítese el ejemplo de una función continua en un punto, pero no derivable en este punto.
4. ¿Puede ser continua en un punto una función que tiene la derivada en este mismo punto?

§ 3. Concepto de diferencial

1. Definición de la diferencial y su significado geométrico. Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en el punto x_0, o sea, el incremento Δy se puede escribir en la forma de la suma de dos sumandos:

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. El primer sumando $A\,\Delta x$ es para $\Delta x \to 0$ la infinitésima del mismo orden con Δx (muestre esto por sí mismo), es lineal respecto a Δx. El sumando $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ para $\Delta x \to 0$ es la infinitésima de un orden superior que Δx $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0\right)$. Ahora bien, el primer sumando es la parte principal del incremento de la función $f(x)$.

Definición. *Se llama diferencial de la función $f(x)$ en el punto x_0 a la parte principal, lineal respecto a Δx, del incremento de la función*

$$dy = A\,\Delta x. \tag{1}$$

Si se tiene en cuenta el teorema 5.1, es decir, si se toma en consideración que $A = f'(x_0)$, la fórmula (1) puede escribirse así

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x. \tag{2}$$

Fig. 139

Llamaremos diferencial de la variable independiente x al incremento de esta variable: $dx = \Delta x$. Finalmente la relación (2) toma la forma

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{3}$$

Con ayuda de la igualdad (3) la derivada $f'(x_0)$ puede calcularse como razón entre la diferencial de la función dy y la dx de la variable independiente, o sea,

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

La diferencial de la función tiene el significado geométrico.

Supongamos que el punto M en la gráfica de la función $y = f(x)$ corresponde al valor del argumento x_0 y el punto P, al valor del argumento $x_0 + \Delta x$; la recta MS es la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto M y α, el ángulo entre la tangente y el eje Ox. Sea, luego, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$ y Q, el punto de intersección de la tangente MS con la recta PN (fig. 139). Entonces el incremento de la función Δy es igual a la magnitud del segmento NP. Al mismo tiempo del triángulo rectangular MNQ obtenemos $NQ = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\,\Delta x = dy$, o sea, la diferencial de la función dy es igual a la magnitud del segmento NQ. De la consideración geométrica se ve que las magnitudes de los segmentos NP y NQ son diferentes.

Ahora bien, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es igual al incremento «de la ordenada de la tangente» MS a la gráfica de esta función en el punto $M(x_0;\, f(x_0))$ y el incremento de la función Δy es el incremento «de la ordenada de la misma fun-

ción» $y = f(x)$ en el punto x_0, incremento correspondiente al del argumento igual a Δx.

2. Cálculos aproximados con ayuda de la diferencial. De la definición de la diferencial se deduce que ésta depende linealmente de Δx y es la parte principal del incremento de la función Δy. Al mismo tiempo Δy depende de Δx de un modo más complicado. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\,\Delta x + 3x_0 \times (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, mientras que

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}\right)\Delta x = 3x_0^2\Delta x.$$

Además, para calcular la diferencial se puede hacer uso de la igualdad $dy = f'(x_0)\,dx$. En muchos problemas el incremento de la función en el punto dado se reemplaza, aproximadamente, por la diferencial de la función en este punto

$$\Delta y \approx dy.$$

Con tal reemplazo el error absoluto es igual a $|\Delta y - dy|$ y es para $\Delta x \to 0$ una infinitésima de grado superior que Δx.

En particular, si $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, entonces $\Delta y = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 1{,}261$, $dy = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 = 1{,}2$ y el error absoluto $|\Delta y - dy| = 0{,}061$.

Ejercicio. Hallar aproximadamente el incremento Δy de la función $f(x) = x^2$ si $x_0 = 2$ y $\Delta x = 0{,}01$. (*Resp.* 0,04.)

○ **Ejemplo.** Mostremos que si el número α es pequeño, se puede utilizar la fórmula aproximada

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Resolución. Efectivamente, tomemos la función $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces, al ser pequeños Δx,

$$\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx dy$$

$$\text{o bien } \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0} \approx (\sqrt{x})'\Big|_{x=x_0} \Delta x =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}\right)\Delta x =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x\,(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0})}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,\Delta x,$$

de donde, poniendo $x_0 = 1$, $\Delta x = \alpha$, resulta

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

En particular, para $\alpha = 0{,}0003$ hallamos $\sqrt{1{,}0003} \approx 1{,}00015$. ●

Ejercicio. Deducir la fórmula aproximada $\sqrt{a^2+h} \approx a + h/(2a)$. Hallar aproximadamente $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{33}$. (*Resp.* 10,05; 1,02; 6,41; 2,08; 2,01.)

Ahora examinemos las reglas de derivación y cálculo de las derivadas de funciones elementales simples. Nótese que al deducir las fórmulas y calcular prácticamente las derivadas no suele escribirse x_0 sino simplemente x, pero en este caso x se considera fijo.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la diferencial de la función en el punto x_0.
2. ¿Por qué en la definición de la diferencial la expresión $A\Delta x$ se llama parte principal, lineal respecto a Δx, del incremento de la función $f(x)$?
3. ¿Cuál es el significado geométrico de la diferencial?

§ 4. Reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente

Teorema 5.3. *Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son derivables en un punto x, la suma, diferencia, producto y cociente de estas funciones (el cociente a condición de que $v(x) \neq 0$) también son derivables en este punto y tienen lugar las siguientes fórmulas:*

$$1.\ (u \pm v)' = u' \pm v', \quad 2.\ (u\cdot v)' = u'v + uv'$$

$$3.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1}$$

□ **Demostración.** Para deducir las fórmulas (1) utilicemos la definición de la derivada, la igualdad evidente $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$ y el teorema 4.3. Analicemos por separado cada caso:

$$1.\ (u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

$$2.\ (u\cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u]\,[v(x) + \Delta v] - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\,v(x) + \Delta u v(x) + u(x)\,\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x)\,v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+ u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v \cdot u' + uv' + 0 \cdot u' = u'v + uv',$$

ya que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ y los factores u y v son constantes y no dependen de Δx.

3. $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x)\,v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u]\,v(x) - u(x)\,[v(x) + \Delta v]}{\Delta x v(x)\,[v(x) + \Delta v]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{\Delta x v\,(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} =$$

$$= \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad \blacksquare$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. *Dense las reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente* de dos funciones.

2. *¿Qué se puede decir si están cumplidas todas las suposiciones del teorema* sobre las reglas de derivación, a excepción de la suposición $v(x) \neq 0$, es decir, que da *cumplida la hipótesis de que* $v(x) = 0$?

3. ¿Por qué al demostrar las reglas de derivación del producto y el cociente $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$?

§ 5. Cálculo de las derivadas de funciones constante, potencial, de las funciones trigonométricas y de una función logarítmica

1. Derivada de una función constante. La derivada de la función *$y = f(x) = C$, donde C es un número constante, se expresa por la fórmula*

$$y' = 0.$$

☐ **Demostración.** Para cualesquiera x y Δx tenemos $f(x + \Delta x) = C$ y $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. De aquí para cada

$\Delta x \neq 0$ la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ y, por consiguiente,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \quad \blacksquare$$

Observación. El factor constante puede sacarse fuera del signo de la derivada, es decir, $(Cu)' = Cu'$. Efectivamente, si $v = C$ (C = const), conforme a la fórmula 2 (véase el teorema 5.3) $(Cu)' = (C)'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$, lo que se necesitaba demostrar.

2. Derivada de una función potencial. La derivada de la función $y = x^n$, *cuyo exponente* n *es un número positivo entero, se expresa por la fórmula*

$$y' = nx^{n-1}.$$

□ **Demostración.** Utilizando la fórmula del binomio de Newton se puede escribir

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^2\right] - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Ahora bien, para $\Delta x \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Puesto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0,$$

entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Observación. El caso de la función potencial cuyo exponente es todo número real se considerará en el subp. 2 del § 9.

3. Derivadas de funciones trigonométricas.

1) *La derivada de la función* $y = \operatorname{sen} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = \cos x.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2).$$

Ahora bien, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen}(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cos(x + \Delta x/2).$$

Puesto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$ (*primer límite notable*) y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x$ en virtud de la continuidad de la función $\cos x$, entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x. \quad \blacksquare$$

2) *La derivada de la función* $y = \cos x$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = -\text{sen}\, x.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$\Delta y = \cos\,(x + \Delta x) - \cos x = -2\,\text{sen}\,(\Delta x/2)\,\text{sen}\,(x + \Delta x/2)$.

Ahora bien, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\,\text{sen}\,(\Delta x/2)\,\text{sen}\,(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = -\frac{\text{sen}\,(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\,\text{sen}\,(x + \Delta x/2).$$

Puesto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \text{sen}\, x$ en virtud de la continuidad de la función $\text{sen}\, x$, entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{sen}\, x. \quad \blacksquare$$

3) *La derivada de la función* $y = \text{tg}\, x$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right).$$

□ **Demostración.** Puesto que $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, conforme al teorema 5.3 resulta

$$y' = \frac{(\text{sen}\, x)' \cos x - \text{sen}\, x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \text{sen}\, x\,(-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x},$$

por lo tanto,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacksquare$$

4) *La derivada de la función* $y = \text{ctg}\, x$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}\,(x \neq n\pi).$$

□ **Demostración.** Puesto que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, entonces, análogamente a lo precedente,

$$y' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$
$$= \frac{(-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

por lo tanto,

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \quad ■$$

4. Derivada de una función logarítmica. *La derivada de la función* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ *se expresa mediante la fórmula*

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Así pues, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right].$$

Poniendo $\frac{x}{\Delta x} = h$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

(*segundo límite notable*) y puesto que la función logarítmica es continua, entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad ■$$

Corolario. *Si* $y = \log_e x = \ln x$, *entonces* $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

○ **Ejemplo.** Utilizando las reglas y fórmulas de derivación, hallar la derivada de la función $f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x$.

Resolución. Tenemos

$$f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x)' =$$
$$= (5)' + (x^3)' + 3(x^2)' + (\operatorname{sen} x)' + (\cos x)' + 2(\operatorname{tg} x)' - 3(\operatorname{ctg} x)' +$$
$$+ (\log_2 x)' + 3(\ln x)' = 3x^2 + 6x + \cos x - \operatorname{sen} x +$$
$$+ \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{x} \log_2 e + \frac{3}{x}. \quad ●$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4x^5 - 3 \operatorname{sen} x + 5 \operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ 20x^4 - 3\cos x - \frac{5}{\operatorname{sen}^2 x}.\right)$
2. $f(x) = \log_2 x + 3 \log_3 x$. $\left(Resp.\ \frac{\ln 24}{x \ln 2 \ln 3}.\right)$
3. $f(x) = 4\cos x - 2 \operatorname{tg} x + 3$. $\left(Resp.\ -4 \operatorname{sen} x - \frac{2}{\cos^2 x}.\right)$
4. $f(x) = 5 \ln x - 7\cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{5}{x} + 7 \operatorname{sen} x - \right.$ $\left. - 4 \operatorname{ctg} 2x.\right)$
5. $f(x) = x \operatorname{sen} x$. $(Resp.\ \operatorname{sen} x + x \cos x.)$
6. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$. $(Resp.\ x(\operatorname{sen} 2x + x)\sec^2 x.)$
7. $f(x) = x^2 \log_3 x$. $\left(Resp.\ x\frac{2\ln x + 1}{\ln 3}.\right)$
8. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. $\left(Resp.\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}.\right)$
9. $f(x) = \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x} + x \operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{\operatorname{sen} x - x^2 + x\cos x(\operatorname{sen} x - \ln x)}{x \operatorname{sen}^2 x}.\right)$
10. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\operatorname{sen} x}$. $\left(Resp.\ -\frac{2 + \operatorname{sen} x}{(1 + 2\operatorname{sen} x)^2}.\right)$
11. $f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$. $\left(Resp.\ \frac{(1+x^2)(\operatorname{sen} x \cos x + x) - x^2 \operatorname{sen} 2x}{(1+x^2)^2 \cos^2 x}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de las funciones constante, potencial, trigonométricas y de la función logarítmica.
2. ¿Por qué al deducir la fórmula de la derivada de una función logarítmica los signos de la función y del límite cambiaron de lugar?

§ 6. Teorema de la derivada de una función inversa

Sea que la función $y = f(x)$ satisface las hipótesis del teorema 4.15 de la función inversa y la función $x = \varphi(y)$ es inversa para ella. Entonces tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Si la función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 la derivada $f'(x_0) \neq 0$, la función inversa $x = \varphi(y)$ también tiene en el punto correspondiente $y_0 = f(x_0)$ una derivada, con la particularidad de que*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□ **Demostración.** Asignemos al argumento y de la función inversa $x = \varphi(y)$ cierto incremento $\Delta y \neq 0$ en el punto y_0. La función $x = \varphi(y)$ obtendrá cierto incremento Δx, con la particularidad de que, en virtud de crecimiento (o decrecimiento) de la función in-

versa, $\Delta x \neq 0$. Por consiguiente, se puede escribir

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Pasemos en esta igualdad al límite para $\Delta y \to 0$. Puesto que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua en el punto y_0 (véase el teorema 4.15), entonces $\Delta x \to 0$ para $\Delta y \to 0$. Pero para $\Delta x \to 0$ el límite del segundo miembro de la igualdad existe y es igual a $1/f'(x_0)$. Por lo tanto, existe también el límite del primer miembro de la igualdad el cual, por definición, es igual a $\varphi'(y_0)$. De esta manera, resulta

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \quad ■ \qquad (1)$$

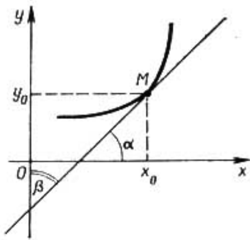


Fig. 140

El teorema demostrado tiene una interpretación geométrica sencilla. Consideremos en cierto entorno del punto x_0 la gráfica de la función $y = f(x)$ (o bien de la función inversa $x = \varphi(y)$). Supongamos que en esta gráfica al punto x_0 le corresponde el punto M (fig. 140). Como es sabido, la derivada $f'(x_0)$ es igual a la tangente del ángulo α de inclinación de la recta tangente, que pasa por el punto M, al eje Ox. La derivada de la función inversa $\varphi'(y_0)$ es igual a la tangente del ángulo β de inclinación de la misma recta tangente al eje Oy. Puesto que la suma de los ángulos α y β vale $\pi/2$, la fórmula (1) expresa el siguiente hecho evidente:

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema sobre la derivada de la función inversa.
2. ¿Qué se puede decir de la derivada de la función inversa si $f'(x_0) = 0$? Cítese un ejemplo de tal caso.
3. ¿Cuál es el significado geométrico del teorema sobre la derivada de la función inversa?

§ 7. Cálculo de las derivadas de una función exponencial y de funciones trigonométricas inversas

Apoyándonos en el teorema 5.4 demostrado anteriormente, continuemos el cálculo de las derivadas de funciones elementales simples.

1. Derivada de una función exponencial. *La derivada de la función* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = a^x \ln a.$$

□ **Demostración.** La función exponencial $y = a^x$ es inversa para la función logarítmica $x = \log_a y$. Así pues,

$$x'(y) = \frac{1}{y} \log_a e$$

y en virtud del teorema 5.4 sobre la derivada de la función inversa y de la relación conocida de la matemática elemental $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, obtenemos

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a. \quad ■$$

Corolario. *Si* $y = e^x$, *entonces* $y' = (e^x)' = e^x$.

2. Derivadas de funciones trigonométricas inversas.

1) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arcsen} x$ *se expresa mediante la fórmula*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; (|x| < 1).$$

□ **Demostración.** La función $y = \operatorname{arcsen} x$ es inversa para la función $x = \operatorname{sen} y$. Puesto que $x'(y) = \cos y$, conforme al teorema 5.4 sobre la derivada de la función inversa, resulta

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}.$$

La raíz se ha tomado con el signo más, porque $\cos y$ es positivo sobre el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} y = x$, finalmente obtenemos

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad ■$$

2) *La derivada de la función* $y = \arccos x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La **demostración** es análoga a la precedente.

3) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arctg} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

□ **Demostración.** La función $y = \operatorname{arctg} x$ es inversa para la función $x = \operatorname{tg} y$. Puesto que $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, entonces

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y.$$

Pero $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, por consiguiente,

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad \blacksquare$$

4) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arcctg} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

La **demostración** es análoga a la precedente.

○ **Ejemplo.** Utilizando las reglas y fórmulas de derivación, hallar la derivada de la función $f(x) = 5^x + \operatorname{arcsen} x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x$.

Resolución. Tenemos

$$f'(x) = (5^x + \operatorname{arcsen} x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x)' =$$
$$= (5^x)' + (\operatorname{arcsen} x)' + 3 (\arccos x)' + (\operatorname{arctg} x)' - 3 (\operatorname{arcctg} x)' =$$
$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} =$$
$$= 5^x \ln 5 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2}. \quad \bullet$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \operatorname{arcsen} x + 6^x + 5 \arccos x$. $\left(\textit{Resp.}\ 6^x \ln 6 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
2. $f(x) = x \arccos x$. $\left(\textit{Resp.}\ \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2}{1+x^2}.\right)$
4. $f(x) = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} x$. $\left(\textit{Resp.}\ 4e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
5. $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Redúzcanse las fórmulas de las derivadas para la función exponencial y las funciones trigonométricas inversas.
2. ¿Por qué al deducir la fórmula de la derivada para la función exponencial la función $y = a^x$ es inversa para la función $x = \log_a y$?

§ 8. Regla de derivación de una función compuesta. Diferencial de una función compuesta

1. Regla de derivación de una función compuesta.

Teorema 5.5. *Si la función* $x = \varphi(t)$ *tiene una derivada en el punto* t_0 *y la función* $y = f(x)$ *tiene una derivada en el punto correspondiente* $x_0 = \varphi(t_0)$, *la función compuesta* $f[\varphi(t)]$ *tiene una derivada*

en el punto t_0 y es válida la siguiente fórmula:

$$y'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{1}$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $y = f(x)$ se supone derivable en el punto x_0, el incremento de esta función puede escribirse en la forma

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{2}$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Dividiendo la igualdad (2) por Δt, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3}$$

La igualdad (3) es válida para cualesquiera Δx suficientemente pequeños. Tomemos Δx igual al incremento de la función $x = \varphi(t)$, correspondiente al incremento Δt del argumento t. Hagamos que en esta igualdad Δt tienda a cero. Puesto que, según la hipótesis, la función $x = \varphi(t)$ tiene en el punto t_0 una derivada, ella es continua en este punto. Por consiguiente, conforme a la tercera definición de la continuidad de una función, $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$. Pero en este caso también $\alpha(\Delta x)$ tenderá a cero, o sea, resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\alpha(\Delta x)\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0\cdot\varphi'(t_0) = 0. \tag{4}$$

De la relación (4) se desprende la existencia del límite de todo el segundo miembro de la igualdad (3) para $\Delta t \to 0$, igual a $f'(x_0) \times \varphi'(t_0)$. Por lo tanto, existe el límite para $\Delta t \to 0$ también en el primer miembro de la igualdad (3), el cual, por definición de la derivada, es igual a la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$. De este modo queda demostrada la derivabilidad de la función compuesta y determinada la validez de la fórmula (1). ■

Observación. En el teorema dado hemos considerado una función compuesta donde y depende de t por medio de la variable intermedia x. Es posible también una dependencia más complicada: con dos, tres y más variables independientes, pero la regla de derivación queda anterior.

Así, por ejemplo, si $y = f(x)$, donde $x = \varphi(u)$, $u = \psi(v)$ y $v = \chi(t)$, la derivada $y'(t)$ ha de buscarse con ayuda de la fórmula

$$y'(t) = y'(x)\,x'(u)\,u'(v)\,v'(t). \tag{5}$$

Consideremos los ejemplos de derivación de las funciones compuestas.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada de la función $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Resolución. La función dada puede representarse en la forma $y = e^u$, donde $u = \operatorname{arctg} x$. Entonces, de acuerdo con la fórmula (1)

$$y'(x) = y'(u)\,u'(x) = e^u \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Reemplazando u por $\operatorname{arctg} x$, finalmente obtenemos

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Ejemplo 2. Calcular la derivada de la función $y = \operatorname{tg}^2(x^2+1)$.

Resolución. La función dada puede representarse en la forma $y = u^2$, donde $u = \operatorname{tg} v$ y $v = x^2+1$. Utilizando la fórmula (5), tenemos

$$y'(x) = y'(u)\,u'(v)\,v'(x) = (u^2)'\,(\operatorname{tg} v')\,(x^2+1)' = 2u \sec^2 v \cdot 2x =$$
$$= 2 \operatorname{tg}(x^2+1) \sec^2(x^2+1) \cdot 2x = 4x \operatorname{tg}(x^2+1) \sec^2(x^2+1).$$

Sin duda, no es indispensable hacer las notaciones tan detalladas. Por lo general, el resultado ha de escribirse inmediatamente, guardando sucesivamente en la memoria los argumentos intermedios.

Así, por ejemplo, el cálculo de la derivada en el último ejemplo se puede escribir en la siguiente forma:

$$y'(x) = 2 \operatorname{tg}(x^2+1)\frac{1}{\cos^2(x^2+1)} \cdot (x^2+1)' =$$
$$= 2 \operatorname{tg}(x^2+1) \sec^2(x^2+1) \cdot 2x = 4x \operatorname{tg}(x^2+1) \sec^2(x^2+1).$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$. (*Resp.* $3 \cos 3x$.)
2. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+5x+2)$. (*Resp.* $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$.)
3. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. (*Resp.* $\operatorname{sen} 2x$.)
4. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$. (*Resp.* $3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$.)
5. $f(x) = \cos^{100} x$. (*Resp.* $-100 \operatorname{sen} x \cos^{99} x$.)
6. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2+3)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}.\right)$
7. $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$. (*Resp.* $\operatorname{ctg} x$.)
8. $f(x) = \ln \operatorname{tg} 5x$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{10}{\operatorname{sen} 10x}.\right)$
9. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$. (*Resp.* $e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x$.)
10. $f(x) = \ln(x^2+2x)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2(x+1)}{x(x+2)}.\right)$
11. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. (*Resp.* $\operatorname{arctg} x$.)
12. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x^3$. (*Resp.* $3x^2 \operatorname{sen} 2x^3$.)
13. $f(x) = \frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{5}{8} \operatorname{tg} 2x \cdot \sec^{10} 2x.\right)$
14. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$. (*Resp.* $-\operatorname{sen} 4x$.)
15. $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{-2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$
16. $f(x) = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2}$. (*Resp.* $3 \cdot 2^{3x} \ln 2 + 5x^4 - 2xe^{-x^2}$.)
17. $f(x) = x^2 e^{-x}$. (*Resp.* $xe^{-x}(2-x)$.)
18. $f(x) = (x+2)e^{-x^2}$. (*Resp.* $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$.)

19. $f(x)=e^{\frac{1}{\cos x}}$. $\left(Resp.\ e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.\right)$

20. $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}$. $\left(Resp.\ \frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}.\right)$

21. $f(x)=10^{3-\operatorname{sen}^3 2x}$. $(Resp.\ 10^{3-\operatorname{sen}^3 2x}\ln 10\cdot(-3\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 4x).)$

22. $f(x)=\operatorname{sen}(2^x)$. $(Resp.\ 2^x(\ln 2)\cos 2^x.)$

23. $f(x)=\arccos(1-2x)$. $\left(Resp.\ \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.\right)$

24. $f(x)=\operatorname{arcsen}(e^{4x})$. $\left(Resp.\ \frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}.\right)$

25. $f(x)=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$. $\left(Resp.\ \frac{5}{(5x+3)[1+\ln^2(5x+3)]}.\right)$

26. $f(x)=\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}$. $\left(Resp.\ \frac{2\operatorname{arcctg}(1/x)}{1+x^2}.\right)$

27. $f(x)=\operatorname{tg}\operatorname{sen}\cos x$. $\left(Resp.\ \frac{-\operatorname{sen}\cos(\cos x)}{\cos^2(\operatorname{sen}\cos x)}.\right)$

28. $f(x)=\ln^5\operatorname{sen} x$. $(Resp.\ 5\operatorname{ctg} x\cdot\ln^4\operatorname{sen} x.)$

2. Diferencial de una función compuesta. Usted ya sabe que si x es una variable independiente, la diferencial de la función derivable $y=f(x)$ tiene la siguiente forma

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{6}$$

□ Ahora vamos a mostrar que esta forma es universal y válida también en el caso cuando x no es una variable independiente sino la función derivable de cierta variable independiente t, o sea, y es una función compuesta de t. Efectivamente, sea $y=f(x)$ y $x=\varphi(t)$: $y=f[\varphi(t)]$. Entonces, puesto que el argumento t es variable independiente, para la función compuesta indicada $y=f[\varphi(t)]$ y para la función $x=\varphi(t)$ las diferenciales son representables en la forma (6)

$$dy=\{f[\varphi(t)]\}'\,dt,\quad dx=\varphi'(t)\,dt. \tag{7}$$

Conforme a la regla de derivación de una función compuesta

$$\{f[\varphi(t)]\}'=f'(x)\cdot\varphi'(t). \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en la primera de las fórmulas (7), resulta

$$dy=f'(x)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

y ya que, según la segunda fórmula (7), $\varphi'(t)\,dt=dx$, finalmente encontramos

$$dy=f'(x)\,dx$$

que coincide con (6), conforme se quería demostrar. ■

De esta manera, hemos obtenido que la fórmula (6) es justa también para la función compuesta. Esta propiedad de la dif
de una función compuesta suele llamarse *invariancia de su forma.*

○ **Ejemplo 3.** Hallar la diferencial de la función compuesta $y = \operatorname{sen} x$, donde $x = t^2$.

Resolución. Por la fórmula (6) tenemos

$$dy = (\operatorname{sen} x)' \, dx = \cos x \, dx$$

y ya que $x = t^2$, $dx = (t^2)' \, dt = 2t \, dt$, entonces, sustituyendo en la expresión para dy, finalmente obtenemos

$$dy = 2t \cos t^2 \, dt. \quad \bullet$$

Introduzcamos luego los conceptos de diferencial segunda y de diferenciales sucesivas de la función $y = f(x)$ que ya no poseen la propiedad de invariancia de la forma. Por eso la propiedad demostrada se llama también *invariancia de la forma de la diferencial primera*.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de la derivada de una función compuesta.
2. ¿Es aplicable el teorema de la derivada de una función compuesta a la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ en el punto $x = 0$? ¿Existe la derivada de esta función en el punto $x = 0$?

§ 9. Derivada logarítmica. Derivada de una función potencial con todo exponente real. Tabla de las derivadas de las funciones elementales simples

1. Concepto de derivada logarítmica de una función. Calculemos la derivada de la función $y = \ln |x|$ $(x \neq 0)$. Puesto que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$ (hemos obtenido la última igualdad basándonos en la regla de derivación de una función compuesta), la derivada de la función se expresa por la siguiente fórmula:

$$y' = (\ln |x|)' = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta la función obtenida (1), calculemos la derivada de la función compuesta $y = \ln |u|$, donde $u = f(x)$ es la función derivable. Tenemos

$$y' = (\ln |u|)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

o bien

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{2}$$

La derivada del logaritmo de la función $(\ln |f(x)|)'$ se llama precisamente *derivada logarítmica* de la función $f(x)$. Para simplificar la

notación en caso de la derivación logarítmica el signo del módulo en la función $f(x)$ puede omitirse.

A título de ejemplo calculemos con ayuda de la derivada logarítmica la derivada de la función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$, donde u y v son ciertas funciones de x ($u > 0$) que tienen en el punto dado las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$.

Puesto que $\ln y = v(x) \ln u(x)$, por la fórmula (2) obtenemos

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Teniendo en cuenta que $y = u(x)^{v(x)}$, encontramos la siguiente fórmula para la derivada de la función potencial-exponencial:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \quad (3)$$

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada de la función $y = x^x$.

Resolución. La función dada puede representarse en la forma $y = u(x)^{v(x)}$, donde $u(x) = x$ y $v(x) = x$. Utilizando la fórmula (3), obtenemos

$$y' = x^x \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x (\ln x + 1). \quad ●$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$. $\left(\textit{Resp.}\ x^{\operatorname{sen} x} \left[\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right]. \right)$
2. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$. $\left(\textit{Resp.}\ (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right). \right)$
3. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$. $\left(\textit{Resp.}\ (\cos x)^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \right). \right)$

La derivada de la función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$ puede ser calculada también por otro método. Representemos la función en la forma $y = e^{v(x) \ln u(x)}$ y calculemos y':

$$y' = [e^{v(x) \ln u(x)}] = e^{v(x) \ln u(x)} [v(x) \ln u(x)]' =$$
$$= y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Sustituyendo $y = u(x)^{v(x)}$, retornamos a la fórmula (3).

La derivada logarítmica es muy cómoda para determinar la derivada de una función potencial con todo exponente real.

2. Derivada de una función potencial con todo exponente real. *La derivada de la función $y = x^\alpha$ (α es todo número real) se define por medio de la fórmula*

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}. \quad (4)$$

□ **Demostración.** Puesto que $y = x^\alpha$, entonces

$$\ln y = \alpha \ln x.$$

Utilizando la fórmula (2), resulta

$$\frac{y'}{y}=[\alpha \ln x]'=\frac{\alpha}{x}.$$

De aquí, teniendo en cuenta que $y=x^{\alpha}$, obtenemos la fórmula para la derivada de la función potencial:

$$y'=(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}. \quad ■$$

○ **Ejemplo 2.** Calcular la derivada de la función $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$.

Resolución. Representemos la función dada en la forma $f(x)=(1+\cos^2 x)^{1/2}$. Utilizando la fórmula (4), obtenemos

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{1/2-1}\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-1/2}2\cos x(-\operatorname{sen} x)=-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}. \quad ●$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)=x^{1/x}$. (*Resp.* $x^{1/x-2}(1-\ln x)$.)

2. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+2$. $\left(Resp.\ \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}.\right)$

3. $f(x)=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. $\left(Resp.\ \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).\right)$

4. $f(x)=\sqrt[7]{x}\ln x$. $\left(Resp.\ \frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^6}}.\right)$

5. $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{arcctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{\operatorname{arcctg} x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}.\right)$

6. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.\right)$

7. $f(x)=\sqrt{2x-\operatorname{sen} 2x}$. $\left(Resp.\ \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2x-\operatorname{sen} 2x}}.\right)$

8. $f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\right)$

9. $f(x)=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x\right)$. (*Resp.* $\sqrt{1-x^2}$.)

10. $f(x)=x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$. (*Resp.* $\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$.)

11. $f(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{-2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$

12. $f(x)=e^{\sqrt[7]{x^2}}$. $\left(Resp.\ \frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}.\right)$

13. $f(x)=\ln\left(\operatorname{sen} x+\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}.\right)$

14. $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.\right)$

15. $f(x)=\sqrt[5]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{20}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4 \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}}.\right)$

16. $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$. $\left(Resp.\ \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.\right)$

17. $f(x)=\ln(x \operatorname{sen} x\cdot\sqrt{1-x^2})$. $\left(Resp.\ \frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{x}{1-x^2}.\right)$

18. $f(x)=\sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$. $\left(Resp.\ \frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\cdot\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}.\right)$

Por lo tanto hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales simples y podemos hacer la siguiente tabla.

3. Tabla de las derivadas de las funciones elementales simples.

I. $(C)'=0$.

II. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, en particular, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, en particular $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

IV. $(a^x)'=a^x\ln a$, en particular $(e^x)'=e^x$.

V. $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$.

VI. $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

IX. $(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

La tabla indicada junto con las reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente, así como junto con la regla de derivación de una función compuesta constituye la base del cálculo diferencial.

De las reglas y fórmulas de derivación se puede sacar una conclusión importante: *la derivada de toda función elemental es también una función elemental.* Ahora bien, la operación de derivación no hace salir de la clase de funciones elementales.

En el subp. 1 del § 3 queda determinado que la diferencial dy de la función $y=f(x)$ es siempre igual a la derivada de esta función $f'(x)$ multiplicada por la diferencial del argumento dx. Por eso las fórmulas citadas para determinar las derivadas pueden transformarse fácilmente en fórmulas para determinar las diferenciales de las fun-

ciones elementales simples:

1. $d(C) = 0 \cdot dx = 0$ ($C = \text{const}$).
2. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot dx$.
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \cdot dx$.
4. $d(a^x) = a^x \ln a \cdot dx$.
5. $d(\operatorname{sen} x) = \cos x \, dx$.
6. $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x \, dx$.
7. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$.
8. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.
9. $d(\operatorname{arcsen} x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.
12. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Las fórmulas para determinar las diferenciales de la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones tienen la forma

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Limitémonos por la deducción de la fórmula del producto. (Proponemos que el lector mismo deduzca las demás fórmulas.) Según la definición de la diferencial tenemos

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')\,dx = vu'\,dx + uv'\,dx = v\,du + u\,dv,$$

ya que $u'dx = du$ y $v'dx = dv$.

○ **Ejemplo 3.** Hallar la diferencial de la función $y = x^3 \operatorname{sen} 3x$.

Resolución. Según la fórmula recién demostrada tenemos

$$dy = x^3 d(\operatorname{sen} 3x) + \operatorname{sen} 3x \, d(x^3) = x^3 (\operatorname{sen} 3x)' dx +$$
$$+ \operatorname{sen} 3x \, (x^3)' dx = x^3 3 \cos 3x \, dx +$$
$$+ \operatorname{sen} 3x \, 3x^2 \, dx = 3x^2 (x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x)\, dx. \quad ●$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el procedimiento de la derivación logarítmica?
2. Dedúzcase la fórmula de la derivada para una función potencial con todo exponente real.
3. ¿Por qué la operación de derivación no hace salir de la clase de funciones elementales?
4. Demuéstrese que $d(u \pm v) = du \pm dv$.

§ 10. Derivadas y diferenciales de orden superior

1. Concepto de derivada de n-ésimo orden. Como ya hemos señalado en el § 1 del capítulo dado, la misma derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ es cierta función del argumento x. Por consiguiente, respecto a ella se puede otra vez poner la cuestión acerca de la existencia de la derivada y su determinación.

Llamaremos $f'(x)$ *derivada de primer orden.*

La derivada de la derivada de cierta función se llama *derivada de segundo orden* (o *segunda derivada*). La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* (o *tercera derivada*), etc. Las derivadas, comenzando con la segunda, se llaman derivadas de orden superior y se designan $y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$, o bien $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$, $\ldots$.

La derivada de n-ésimo orden es derivada de la derivada de orden $(n-1)$ o sea, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Las derivadas de orden superior tienen amplia aplicación en la física. Aquí nos limitaremos por la interpretación física de la segunda derivada $f''(x)$. Si la función $y = f(x)$ describe la ley del movimiento de un punto material sobre la línea recta, entonces, como se sabe, la primera derivada $f'(x)$ es la velocidad instantánea del punto en el instante de tiempo x y la segunda derivada en tal caso es igual *a la velocidad de variación de la velocidad, o sea, a la aceleración* del punto en movimiento en el instante x.

Ejercicios. Hallar las derivadas de segundo orden de las *siguientes funciones:* **1.** $f(x) = e^{-x^2}$. (*Resp.* $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.) **2.** $f(x) = \operatorname{tg} x$. $\left(Resp.\ \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}.\right)$ **3.** $f(x) = \operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$ **4.** $f(x) = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$. $\left(Resp.\ \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.\right)$ **5.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. (*Resp.* $2\cos 2x$.) **6.** $f(x) = \cos^2 x$. (*Resp.* $-2\cos 2x$.) **7.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.\right)$ **8.** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. $\left(Resp.\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}.\right)$ **9.** $f(x) = \ln(2x-3)$. $\left(Resp.\ \frac{-4}{(2x-3)^2}.\right)$ Hallar las derivadas de tercer orden de *las siguientes funciones:* **1.** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. $\left(Resp.\ \frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}.\right)$ **2.** $f(x) = xe^{-x}$. (*Resp.* $e^{-x}(3-x)$.) **3.** $f(x) = e^x \cos x$. (***Resp.*** $-2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.) **4.** $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$. (***Resp.*** $(6-x^2)\cos x - 6x\operatorname{sen} x$.) **5.** $f(x) = x^3 2^x$. (***Resp.*** $2^x(x^3\ln^3 2 + 9x^2\ln^2 2 + 18x\ln 2 + 6)$.) **6.** $f(x) = x\ln x$. (*Resp.* $-1/x^2$.)

2. n-ésimas derivadas de algunas funciones.

1) *Calculemos la n-ésima derivada de la función potencial* $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ (α cualquier número real). Derivando sucesivamente, tenemos [1])

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots,\ y^{(n)} =$$
$$= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ \ldots\ [\alpha-(n-1)]\,x^{\alpha-n}.$$

[1]) Al deducir estrictamente las fórmulas de las n-ésimas **derivadas** conviene aplicar el método de inducción matemática.

En el caso particular, si $\alpha = m$, donde m es un número natural, resulta

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(m-1)]\cdot 1 = m!,$$
$$(x^m)^{(n)} = 0 \quad \text{para} \quad n > m.$$

No es difícil notar que, conociendo la forma general de la n-ésima derivada, se puede escribir inmediatamente la derivada de todo orden sin calcular en este caso las derivadas precedentes.

Por ejemplo, $(x^3)^{(3)} = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, $(x^3)^{(2)} = 3\cdot 2\cdot x = 6x$ y $(x^3)^{(4)} = 0$.

2) *Calculemos la n-ésima derivada de la función exponencial* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Derivando sucesivamente, tenemos

$$y' = a^x \ln a, \quad y^{(2)} = a^x (\ln a)^2,$$
$$y^{(3)} = a^x (\ln a)^3, \ \ldots, \ y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

En particular, si $y = e^x$, para todo número n

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3) *Calculemos la n-ésima derivada de la función* $y = \operatorname{sen} x$. Derivando sucesivamente, tenemos

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(2)} = -\operatorname{sen} x =$$
$$= \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \ \ldots, \ y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora bien, la derivada de todo orden de $\operatorname{sen} x$ puede ser calculada mediante la fórmula

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Por ejemplo, $(\operatorname{sen} x)^{(10)} = \operatorname{sen}\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$.

4) Análogamente se obtiene *la fórmula de la n-ésima derivada de la función* $y = \cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Ejercicios. Hallar las derivadas de n-ésimo orden de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln x$. $\left(\textit{Resp.}\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.\right)$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$. $\left(\textit{Resp.}\ 3^n\cdot\operatorname{sen}\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right).\right)$

3. $f(x) = e^{x/2}$. (*Resp.* $e^{x/2}(1/2)^n$.)

4. $f(x) = 2^{3x}$. (*Resp.* $2^{3x}(3\ln 2)^n$.)

5. $f(x) = \cos^2 x$. $\left(\textit{Resp.}\ 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).\right)$

La función que tiene la n-ésima derivada en un punto x se llama n veces derivable en este punto. La función que tiene en el punto x derivadas de todo orden se dice infinitamente derivable en este punto.

3. Fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada del producto de dos funciones. Sea $y = uv$, donde u y v ciertas funciones de la variable x que tienen derivadas de todo orden. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que los segundos miembros de los desarrollos se parecen a los desarrollos de distintas potencias del binomio $(a + b)^n$ según la fórmula del binomio de Newton, pero en vez de los exponentes están los números que determinan el orden de las derivadas y las mismas derivadas u y v pueden considerarse como «derivadas de orden nulo» $u^{(0)}$ y $v^{(0)}$. Teniendo esto en cuenta, escribamos, por analogía, la forma general de la n-ésima derivada del producto de dos funciones

$$\begin{aligned} y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (1) \end{aligned}$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de Leibniz* [1]. Vamos a demostrar esta fórmula mediante el método de inducción matemática.

□ Para $n = 1$ la fórmula tiene el aspecto $(uv)' = u'v + uv'$, lo que coincide con la fórmula de derivación del producto de dos funciones. Para $n = 2$ y $n = 3$ ella también está comprobada. Por esta razón, suponiendo la validez de la fórmula (1) para cierto número n, demostrar su validez para $n + 1$. Con este fin derivemos esta fórmula, es decir, determinemos $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + n[u^{(n)}v' + u^{(n-1)}v''] + \\ + \frac{n(n-1)}{2!}[u^{(n-1)}v'' + u^{(n-2)}v'''] + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}[u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \\ + u^{(n-k)}v^{(k+1)}] + \ldots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

---

[1]) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 — 1716), filósofo y matemático alemán.

Suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+(n+1)\,u^{(n)}v'+\left(n+\frac{n\,(n-1)}{2!}\right)u^{(n-1)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}\right]\times$$

$$\times\, u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\ldots+(n+1)\,u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.$$

Pero la expresión puesta en los corchetes podemos representar en la forma

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1)\,(n-k-2)\,\ldots\,1}{(k-1)!\,(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-2)\,\ldots\,1}+$$

$$+\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)(n-k)\,(n-k-1)\,(n-k-2)\,\ldots\,1}{k!\,(n-k)\,(n-k-1)\,(n-k-2)\,\ldots\,1}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k\,(n-k+1)}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)\,(n-k)(n-k-1)\,(n-k-2)\ldots1}{k!\,(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1)\,(n-k-2)\,\ldots\,1}=$$

$$=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+2)}{k!}.$$

Entonces

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+(n+1)\,u^{(n)}v'+\frac{(n+1)\cdot n}{2!}\,u^{(n-1)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+2)}{k!}\,u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\ldots$$

$$\ldots+(n+1)\,u'v^{(n)}+uv^{(n+1)}.\quad\blacksquare$$

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada quinta de la función $y=x^5e^x$.

Resolución. Suponiendo $u=x^5$ y $v=e^x$, encontramos $u'=5x^4$, $u''=20x^3$, $u'''=60x^2$, $u^{(4)}=120x$, $u^{(5)}=120$;

$$v'=v''=v'''=v^{(4)}=v^{(5)}=e^x.$$

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la fórmula (1), obtenemos

$$y^{(5)}=120e^x+5\cdot120xe^x+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\,60x^2e^x+$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\,20x^3e^x+5\cdot5x^4e^x+x^5e^x=$$

$$=e^x\,(120+600x+600x^2+200x^3+25x^4+x^5).$$

Ejemplo 2. Calcular la n-ésima ($n \geqslant 2$) derivada de la función $y = x^2 \cos x$.

Resolución. Suponiendo $u = \cos x$ y $v = x^2$, encontramos

$$u^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0.$$

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la fórmula (1), obtenemos

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) x^2 + 2n \cos\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] x + \frac{2n(n-1)}{1\cdot 2} \cos\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right]. \quad \bullet$$

Existe una otra, más breve, deducción de **la fórmula de Leibniz.**

□ Escribámosla en la forma

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{2}$$

donde $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $0! = 1$, C_n^k son los coeficientes binomiales. Al igual que antes, hagamos uso del método de inducción. Para $n = 1$ la fórmula ya fue comprobada. Suponiendo su validez para cierto número n, vamos a demostrar la validez de la misma para $n + 1$. Tenemos

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}.$$

Reemplacemos en la segunda suma k por $k - 1$. Resulta

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Entonces

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1})\, u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)},$$

ya que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ y $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$. La fórmula de Leibniz queda demostrada. ■

○ **Ejemplo 3.** Calcular $y^{(10)}$ de la función $y = x^2 e^{3x}$.

Resolución. Empleando la fórmula de Leibniz (2), obtenemos

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 (e^{3x})^{(10)} +$$
$$+ C_{10}^1 (x^2)' (e^{3x})^{(9)} + C_{10}^2 (x^2)^{(2)} (e^{3x})^{(8)} + \ldots + (x^2)^{(10)} e^{3x}.$$

Pero puesto que $(x^2)^{(n)} = 0$ para $n \geqslant 3$, $(e^{3x})^{(k)} = e^{3x} 3^k$, entonces

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 e^{3x} 3^{10} + 10 \cdot 2x e^{3x} 3^9 +$$
$$+ 45 \cdot 2 e^{3x} 3^8 = 3^9 e^{3x} (3x^2 + 20x + 30). \; ●$$

Es cómodo aplicar la fórmula de Leibniz cuando uno de los factores es polinomio de grado n. En este caso todos los términos de la fórmula de Leibniz, comenzando con $n + 2$, se anulan.

4. Diferenciales de orden superior. Consideremos ahora las diferenciales de orden superior. Para comodidad, junto con las designaciones de las diferenciales por los símbolos dy y dx utilizaremos también las designaciones δy y δx.

Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cada punto x de cierto intervalo, entonces la diferencial de la misma

$$dy = f'(x)\, dx,$$

la cual llamaremos *diferencial de primer orden*, es la función de dos variables: del argumento x y de su diferencial dx. Supongamos que la función $f'(x)$ es, a su vez, derivable en cierto punto x. Consideraremos dx en la expresión para dy como factor constante. Entonces la función dy es una función sólo del argumento x y la diferencial de la misma en el punto x tiene la forma (al considerar la diferencial de dy utilizaremos las designaciones para las diferenciales)

$$\delta (dy) = \delta [f'(x)\, dx] = [f'(x)\, dx]' \delta x = f''(x)\, dx \delta x.$$

La diferencia $\delta (dy)$ de la diferencial dy en cierto punto x, tomada para $\delta x = dx$, se llama *diferencial de segundo orden* (*segunda diferencial*) de la función $f(x)$ en el punto x y se designa $d^2 y$, o sea,

$$d^2 y = f''(x)\, (dx)^2.$$

A su vez, la diferencial $\delta (d^2 y)$ de la diferenical $d^2 y$, tomada para $\delta x = dx$, se denomina *diferencial de tercer orden* (*tercera diferencial*) de la función $f(x)$ y se designa $d^3 y$, etc. La diferencial $\delta (d^{(n-1)} y)$ de la diferencial $d^{n-1} y$, tomada para $\delta x = dx$, se llama *diferencial de n-ésimo orden* (*o n-ésima diferencial*) de la función $f(x)$ y se designa $d^n y$.

□ Mostremos que para la n-ésima diferencial de una función es válida la fórmula

$$d^n y = y^{(n)} (dx)^n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Para su demostración hagamos uso del método de inducción. Si $n = 1$ y $n = 2$, ella queda demostrada. Supongamos que esta fórmula es justa también para las diferenciales de orden $n - 1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)} (dx)^{n-1}$$

y la función $y^{(n-1)}$ es, a su vez, derivable en cierto punto x. Entonces

$$d^n y = \delta (d^{n-1}y) = \delta [y^{(n-1)} (dx)^{n-1}] =$$
$$= [y^{(n-1)} (dx)^{n-1}]' \delta x = y^{(n)} \delta x (dx)^{n-1},$$

suponiendo $\delta x = dx$, obtenemos

$$d^n y = \delta (d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = y^{(n)} (dx)^n. \quad \blacksquare$$

De la fórmula (2) se desprende que para todo número de n es válida la igualdad

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{(dx)^n} \text{ o bien } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

o sea, la n-ésima derivada de la función $y = f(x)$ en cierto punto x es igual a la razón entre la n-ésima diferencial de esta función en el punto x y la diferencial del argumento de grado n.

○ **Ejemplo 4.** Calcular la diferencial d^3y de la función $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Resolución. Diferenciando sucesivamente, obtenemos

$$dy = y'dx = (4x^3 - 6x)\, dx,$$
$$d^2y = d\,(dy) = d\,[(4x^3 - 6x)\, dx] = ([4x^3 - 6x)\, dx]'\, dx =$$
$$= (12x^2 - 6)\, (dx)^2,$$
$$d^3y = d\,(d^2y) = d\,[(12x^2 - 6)\, (dx)^2] =$$
$$= [(12x^2 - 6)\, (dx)^2]'\, dx = 24x\, (dx)^3. \quad \bullet$$

Nótese que si x no es una derivable independiente sino la función de cualquier variable t, la fórmula (2) no es justa (para $n > 1$ no posee la propiedad de invariancia de la forma de diferenciales). En particular, para $n = 2$, $d^2y = d\,(y'\,dx) = dy' \cdot dx + y' \cdot d\,(dx) = y''\,(dx)^2 + y'\,d^2x$ o bien $d^2y = y''\,(dx)^2 + y'\,d^2x$.

Vemos que la forma de la diferencial segunda se ha cambiado, ha aparecido el sumando $y'd^2x$. Si x es una variable independiente, este sumando es igual a cero, ya que en este caso dx es una magnitud constante y, por consiguiente, $d^2x = d\,(dx) = 0 \cdot dx = 0$.

Ejercicios. Hallar las diferenciales de orden superior de las siguientes funciones: **1.** $f(x) = 4^{-x^2}$; hallar d^2y. (*Resp.* $4^{-x^2} 2 \ln 4\, (2x^2 \ln 4 - 1)\, (dx)^2$.) **2.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$; hallar d^3y. (*Resp.* $-4 \operatorname{sen} 2x\, (dx)^3$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Por qué la derivada $f'(x)$ puede considerarse como función del argumento x?

2. Dese la definición de la derivada segunda de le función $y = f(x)$.

3. Cítese el ejemplo de una función en la cual existe $f'(x)$, pero no existe $f''(x)$.

4. ¿Es la derivada $f'(x)$ una función continua en un punto x si en este punto existe $f''(x)$?

5. Dese la definición de la n-ésima derivada de la función $y = f(x)$.

6. Se sabe que la n-ésima derivada de la función $y = f(x)$ existe en el punto x. ¿Qué se puede decir de la existencia de derivadas de orden menor en este punto y en su entorno?

7. Dedúzcase la fórmula de Leibniz.

8. Dése la definición de la n-ésima diferencial de la función $y = f(x)$.

§ 11. Representación paramétrica de una función y su derivación

1. Representación paramétrica de una función. Sean dadas dos funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

de una variable independiente t, definidas y continuas en un mismo intervalo. Si $x = \varphi(t)$ es estrictamente monótona, entonces la función inversa $t = \Phi(x)$ es unívoca, también continua y estrictamente monótona. Por eso y puede considerarse como función dependiente de la variable x mediante la variable t llamada parámetro:

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

En este caso se dice que la función $y = f(x)$ *está prefijada paramétricamente con ayuda de las ecuaciones* (1). Notemos que la función $\psi[\Phi(x)]$ es continua en virtud del teorema de la continuidad de una función compuesta.

○ **Ejemplo 1.** Sea $x = R\cos t$, $y = R\,\text{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Puesto que la función $x = R\cos t$ decrece para $0 \leqslant t \leqslant \pi$, las ecuaciones dadas definen paramétricamente la función y de x. Si t se expresa por x de la primera ecuación y se sustituye en la segunda, se obtiene la función buscada de la variable x en la forma explícita.

Más fácilmente se alcanza el objetivo si se nota que

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) = R^2.$$

De aquí $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ o bien $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Puesto que la función $y = R\,\text{sen}\,t$ no es negativa para $0 \leqslant t \leqslant \pi$, elegimos el signo más delante del radical: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Tomando $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$, obtenemos $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Así pues, vemos que cuando t varía de 0 a 2π, las fórmulas $x =$

$= R\cos t$ e $y = R\,\mathrm{sen}\,t$ definen dos funciones de la variable x cuyas gráficas forman una circunferencia completa.

Ejemplo 2. Sea $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

No es difícil comprender que las igualdades dadas son ecuaciones paramétricas de la elipse si recordamos que la elipse se obtiene de la ecuación de la circunferencia de radio a contrayéndola a/b veces a lo largo del eje Oy. Del ejemplo 1 se deduce que las igualdades $x = a \times \cos t$ e $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ son ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. De aquí está claro que las ecuaciones paramétricas de la elipse se obtienen de las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, multiplicando la ordenada y por b/a y tienen la forma $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$. Existe una resolución todavía más sencilla. Excluyendo de estas ecuaciones el parámetro t (resolviéndolas respecto a $\cos t$ y $\mathrm{sen}\,t$, elevando al cuadrado las igualdades obtenidas y sumándolas), obtenemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación de la elipse. ●

La representación paramétrica de la función tiene importancia sobre todo grande al estudiar el movimiento de un punto. Si el punto se mueve sobre un plano, sus coordenadas x, y son funciones de tiempo t. Asignando estas funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, determinaremos por completo el movimiento del punto. En cada lapso de tiempo en el cual la función $\varphi(t)$ es estrictamente monótona se puede, procediendo como antes, definir la función $y = \psi[\Phi(x)]$ cuya gráfica es la curva descrita durante este lapso de tiempo por el punto en movimiento. En el último ejemplo las funciones han descrito el movimiento del punto sobre la elipse.

2. Derivación de la función prefijada paramétricamente. Supongamos ahora que las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ tienen derivadas, con la particularidad de que $\varphi'(t) \neq 0$ sobre cierto intervalo. De la última desigualdad se desprende (como veremos en adelante) la monotonía estricta de la función $x = \varphi(t)$ (véase el teorema 5.12) y, por consiguiente, la univocidad de la función inversa $t = \Phi(x)$. Conforme al teorema 5.4 de la derivada de una función inversa la función $\Phi(x)$ tiene la derivada

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

y conforme al teorema 5.5 de la derivada de una función compuesta la función $y = \psi[\Phi(x)]$ tiene la derivada

$$y'_x = \psi(\Phi(x))\,\Phi'(x).$$

Por lo tanto,

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ o bien, más brevemente, } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Así pues, hemos demostrado que la derivada de una función representada paramétricamente se expresa por la fórmula

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2}$$

○ **Ejemplo 3.** Hallar y'_x si $x = R\cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
Resolución. Según la fórmula (2) obtenemos

$$y'_x = \frac{R\cos t}{-R \operatorname{sen} t} = -\operatorname{ctg} t \quad (t \neq 0;\ \pi).$$

Ejemplo 4. Hallar y'_x si $x = 2t + t^2$, $y = t^2 - 2t^3$.
Resolución. Mediante la fórmula (2) obtenemos

$$y'_x = \frac{2t - 6t^2}{2 + 2t} = \frac{2t\,(1 - 3t)}{2\,(1 + t)} = \frac{t\,(1 - 3t)}{1 + t}. \quad ●$$

Supongamos que existen las segundas derivadas de la función $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ en cierto punto t. Entonces se puede calcular la segunda derivada de la función representada paramétricamente. Notemos que la función $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, a su vez, está representada por las ecuaciones paramétricas

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \psi_1(t), \quad x = \varphi(t).$$

Por eso según la fórmula (2) tenemos

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} =$$
$$= \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Aquí hemos utilizado la regla de derivación del cociente.

Así pues, queda obtenido que

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

o bien, más brevemente,

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{3}$$

Análogamente se puede obtener la derivada de y respecto a x de todo orden.

○ **Ejemplo 5.** Hallar y''_{xx} si $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Resolución. $y'_t = \cos t$, $y''_t = -\operatorname{sen} t$; $x'_t = -\operatorname{sen} t$, $x''_t = -\cos t$. Sustituyendo en la fórmula (3), resulta

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{sen} t)\,(-\operatorname{sen} t) - (-\cos t)\,(\cos t)}{(-\operatorname{sen} t)^3} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{(-\operatorname{sen} t)^3} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^3 t}. \quad ●$$

Ejercicios. Para las siguientes funciones, dadas paramétricamente, hallar y'_x e y''_{xx}:

1. $x = t^2$, $y = \frac{t^2}{3} - t$. $\left(Resp.\ \frac{t^2-1}{2t};\ \frac{1+t^2}{4t^3}.\right)$

2. $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$. $\left(Resp.\ \frac{3}{2} e^t;\ \frac{3}{4e^t}.\right)$

3. $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $\left(Resp.\ \operatorname{ctg} \frac{t}{2};\ -\frac{1}{4a \operatorname{sen}^4 (t/2)}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué es la representación paramétrica de una función?
2. ¿A qué condiciones es válida la fórmula (2) para la derivada de una función prefijada paramétricamente?

§ 12. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

Teorema 5.6. (teorema de Fermat) [1]. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre un intervalo (a, b) y en cierto punto x_0 de este intervalo tiene el valor máximo o mínimo. Entonces si en el punto x_0 existe una derivada, ella es igual a cero, o sea, $f'(x_0) = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 el valor máximo, o sea, $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo punto $x \in (a, b)$. Esto quiere decir que $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$ para todo punto $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Por eso si $\Delta x > 0$ $(x > x_0)$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$, y, por consiguiente,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0,$$

en cambio, si $\Delta x < 0$ $(x < x_0)$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$, por eso

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0,$$

o sea, la derivada a la derecha en el punto x_0 es no positiva y la derivada a la izquierda es no negativa. Según la hipótesis $f'(x_0)$ existe y, por lo tanto, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Esto es posible sólo en el caso cuando $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Pero entonces también $f'(x_0) = 0$.

Análogamente se considera el caso cuando en el punto x_0 la función $f(x)$ tiene el valor mínimo. ■

[1]) Pierre de Fermat (1601 — 1665), matemático francés.

El significado geométrico del teorema de Fermat consiste en el hecho de que si en el punto x_0 la función derivable $f(x)$ tiene el valor máximo (mínimo), en el punto $(x_0; f(x_0))$ la tangente a la gráfica de la función $f(x)$ es paralela al eje Ox (fig. 141).

Observación. El teorema no es justo si la función $f(x)$ se considera sobre un segmento $[a, b]$. Así, por ejemplo, la función $f(x) = x$ sobre el segmento $[0, 1]$ en el punto $x = 0$ toma el valor mínimo

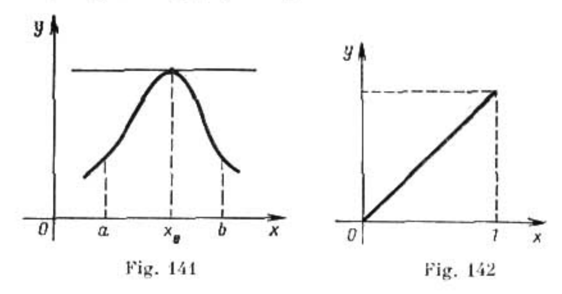


Fig. 141 Fig. 142

y en el punto $x = 1$, el valor máximo; sin embargo, tanto en un punto como en el otro la derivada no se anula y es igual a la unidad (fig. 142).

Teorema 5.7 (teorema de Rolle) [1]. *Supongamos que sobre un segmento $[a, b]$ está definida la función $f(x)$, con la particularidad de que: 1) $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$; 2) $f(x)$ es derivable sobre (a, b); 3) $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual $f'(c) = 0$.*

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, según el segundo teorema de Weierstrass ella tiene sobre este segmento el valor máximo M y el valor mínimo m, o sea, existen tales puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ en los cuales $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$ y se cumplen las desigualdades

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Son posibles dos casos: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

En el primer caso $f(x) = \text{const} = M = m$. Por eso la derivada $f'(x)$ es igual a cero en todo punto del segmento $[a, b]$ y el teorema queda demostrado.

En el segundo caso, puesto que $f(a) = f(b)$, al menos uno de dos valores m o M no se toma en los extremos del segmento $[a, b]$, o sea, existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual la función $f(x)$ toma el valor máximo (mínimo) sobre el intervalo (a, b). En este caso, ya que $f(x)$ es derivable en el punto c, del teorema de Fermat se deduce que $f'(c) = 0$. ■

[1]) Michel Rolle (1652 — 1719), matemático francés.

Geométricamente el teorema de Rolle significa que en el gráfico de una función, continua sobre un segmento $[a, b]$ y derivable dentro de él, la que tome en los extremos de este segmento valores iguales

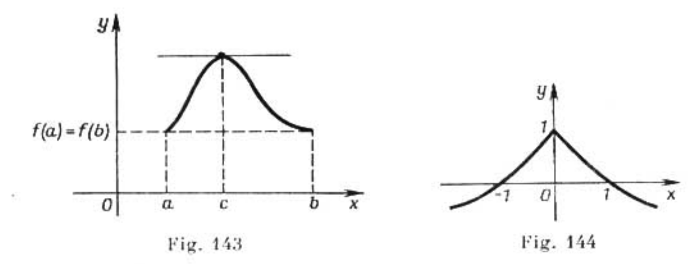


Fig. 143

Fig. 144

existe un punto $(c; f(c))$ en el cual la tangente es paralela al eje Ox (fig. 143). En el punto c de la fig. 143 la función $f(x)$ toma el valor máximo.

○ **Ejemplo 1.** Averiguar si satisface o no las condiciones del teorema de Rolle la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ en el segmento $[-1, 1]$.

Resolución. La función $f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$ es continua sobre toda la recta numérica, por consiguiente, también sobre el segmento

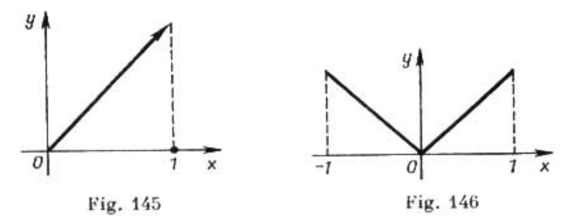


Fig. 145

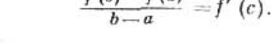
Fig. 146

$[-1, 1]$ (fig. 144). En los extremos de este segmento los valores de la función coinciden: $f(-1) = f(1) = 0$. Sin embargo, la derivada $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ en el punto $x = 0$ no existe. Pero puesto que este punto es un punto interior del segmento $[-1, 1]$, la condición de existencia de una derivada finita sobre el intervalo $(-1, 1)$, condición requerida en el teorema de Rolle, no se cumple. Por eso el teorema de Rolle es inaplicable a la función dada sobre el segmento $[-1, 1]$. En efecto $f'(x) \neq 0$ en el segmento $[-1, 1]$. ●

Ejercicio. En las figs. 142, 145 y 146 se muestran, respectivamente, las gráficas de las siguientes funciones: 1) $f(x) = x$,

$x \in [0, 1]$; 2) $f(x)$, igual a x si $0 \leqslant x < 1$, e igual a 0 si $x = 1$; 3) $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. ¿Satisfacen o no las hipótesis del teorema de Rolle las funciones dadas? Si no satisfacen, indique para cada función dos hipótesis que se cumplen y la tercera que no se cumple (explíquese, por qué).

Teorema 5.8 (Teorema de Lagrange) [1]. *Supongamos que en un segmento $[a, b]$ está definida la función $f(x)$ con la particularidad de que:* 1) *$f(x)$ es continua en $[a, b]$;* 2) *$f(x)$ es derivable en (a, b). Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que sea válida la fórmula*



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

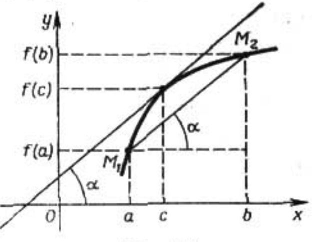


Fig. 147

□ **Demostración.** Introduzcamos para la consideración sobre $[a, b]$; una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

La función $F(x)$ satisface todas tres hipótesis del teorema de Rolle:

1) $F(x)$ es continua sobre $[a, b]$ (como diferencia de dos funciones continuas $f(x)$ y de la función lineal $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$);

2) $F(x)$ es derivable sobre (a, b), o sea dentro de $[a, b]$ tiene una derivada igual a $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3) $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$, o sea, $F(a) = F(b)$.

Por consiguiente, según el teorema de Rolle, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$, o sea, $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. De aquí resulta $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Aclaremos el significado geométrico del teorema de Lagrange (fig. 147). El valor de $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es el coeficiente angular (pendiente) de la secante que pasa por los puntos $M_1(a; f(a))$ y $M_2(b; f(b))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ y $f'(c)$ es el coeficiente angular de la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(c; f(c))$. Del teorema de Lagrange se deduce que existe un punto c tal que la tangente a la gráfica en el punto $(c; f(c))$ sea paralela a la secante M_1M_2. Tales puntos pueden ser también varios, pero al menos uno siempre existe.

[1]) Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813), matemático francés.

Observación 1. La igualdad

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad a < c < b \tag{1}$$

se llama *fórmula de Lagrange* o *fórmula del incremento finito*.

Observación 2. Puesto que el punto c está entre los puntos a y b, se puede escribir

$$c = a + \theta(b-a), \quad 0 < \theta < 1.$$

Aquí $\theta(b-a)$ es una parte de la longitud del segmento $[a, b]$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Lagrange puede escribirse así:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Observación 3. Si se pone $a = x$, $b = x + \Delta x$, resulta

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\,\Delta x, \; 0 < \theta < 1.$$

Tal notación de la fórmula de Lagrange es frecuentemente más cómoda que la notación (1).

El teorema de Lagrange es la base para demostrar muchas fórmulas y teoremas del análisis.

○ **Ejemplo 2.** Comprobar que la función $f(x) = 2x - x^2$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange sobre el segmento $[1, 3]$ y hallar el punto c que se encuentra en la fórmula de Lagrange.

Resolución. La función $f(x) = 2x - x^2$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange, ya que es continua sobre el segmento $[1, 3]$ y tiene la derivada finita $f'(x) = 2 - 2x$ en cada punto interior del segmento, o sea, es derivable sobre $(1, 3)$. Conforme al teorema de Lagrange entre dos puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ existe el punto $x = c$ que satisface la igualdad

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Sustituyendo el valor $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, obtenemos

$$f'(c) = 2 - 2\cdot c = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{(2\cdot 3 - 3^2) - (2\cdot 1 - 1^2)}{3-1} = \frac{-4}{2}$$

o bien $1 - c = -1$, de donde encontramos $c = 2$. ●

Teorema 5.9 (teorema de Cauchy). *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre (a, b). Sea, además, $g'(x) \neq 0$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que sea válida la fórmula*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

□ **Demostración.** Mostremos primero que $g(b) \neq g(a)$, o sea, que la fórmula (2) tiene sentido. Efectivamente, si se admite que $g(b) = g(a)$, entonces, conforme al teorema de Rolle, para la función $g(x)$ habrá un punto $\xi \in (a, b)$ en el cual $g'(\xi) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $g'(x) \neq 0$ sobre (a, b). Pasemos a la demostración de la fórmula (2).

Consideremos sobre $[a, b]$ una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

No es difícil notar que $F(x)$ sobre $[a, b]$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle. En efecto, $F(x)$ es continua sobre $[a, b]$, derivable sobre (a, b) y, además, la sustitución de $x = a$ y $x = b$ da $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$, o sea, $F(a) = F(b)$. Conforme al teorema de Rolle para $F(x)$ existe un punto c, $a < c < b$, tal que $F'(c) = 0$.

Puesto que $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, entonces

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

De donde, teniendo en cuenta que $g'(c) \neq 0$, obtenemos la fórmula (2). ■

La fórmula (2) se llama *fórmula de Cauchy* o *fórmula generalizada del incremento finito.*

Observación. El teorema de Lagrange es el caso particular del de Cauchy si se pone $g(x) = x$.

□ **Ejemplo 3.** Comprobar que las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy sobre el segmento $[1, 4]$ y hallar el punto c que hay en la fórmula de Cauchy.

Resolución. Las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy, ya que son continuas sobre el segmento $[1, 4]$, sus derivadas $f'(x) = 2x - 2$ y $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ existen en todos los puntos del intervalo $(1, 4)$, o sea, son derivables sobre este intervalo y, además, $g'(x) \neq 0$ sobre $[1, 4]$. Conforme al teorema de Cauchy, entre dos puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ existe el punto $x = c$ que satisface la igualdad

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Sustituyendo los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$, obtenemos

$$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}.$$

Resolviendo la ecuación, encontramos $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$. Puesto que el punto $x = c$ debe satisfacer las desigualdades $1 < c < 4$, el punto buscado es $c_1 = 2$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de Fermat. ¿En qué consiste su significado geométrico?
2. ¿Es cierto el teorema si $f(x) = f(x_0)$ para algunos valores de $x \in (a, b)$?
3. Cítese el ejemplo de una función que tome el valor mínimo en un punto y no tenga derivada en este punto. ¿Qué se deduce de esto?
4. Enúnciese el teorema de Rolle y aclare su significado geométrico.
5. ¿Quedará válido el teorema de Rolle si se omite una de sus tres hipótesis? Cítese ejemplos respectivos.
6. Enúnciese el teorema de Lagrange y explíquese su significado geométrico.
7. Enúnciese el teorema de Cauchy.
8. Muéstrese que el teorema de Lagrange es el caso particular del teorema de Cauchy.

§ 13. Evaluación de las indeterminaciones. Regla de L'Hospital

Retornemos a la cuestión de evaluación de las indeterminaciones que se examinaba en el cap. 4. Aquí nos familiarizaremos con un método sencillo y muy eficaz de evaluar las indeterminaciones, llamado *regla de L'Hospital*.

1. Evaluación de la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. El siguiente teorema ofrece la regla de evaluación de la indeterminación dada.

Teorema 5.10 (teorema de L'Hospital) [1]. *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y derivables en cierto entorno del punto a, a excepción, quizás, del mismo punto a. Sea, luego, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$* [2] *y $g'(x) \neq 0$ en el entorno indicado del punto a. Entonces, si existe el límite de la razón de las derivadas $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), existe también el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, con la particularidad de que es válida la fórmula*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de los valores del argumento la cual converge hacia el punto a, con la particularidad de que $x_n \neq a$. Precisemos por completo las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto a, suponiéndolas iguales a cero, o sea, $f(a) = g(a) = 0$. Entonces, evidentemente, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre $[a, x_n]$, derivables sobre (a, x_n) y, según la hipótesis, $g'(x) \neq 0$.

---

[1] G.F. L'Hospital (1661 — 1704), matemático francés.
[2] El teorema queda válido también en el caso cuando $x \to a^-$ y $y \to a^+$.

Por lo tanto, para $f(x)$ y $g(x)$ están cumplidas todas las suposiciones del teorema de Cauchy sobre $[a, x_n]$, o sea, dentro de $[a, x_n]$ existe un punto ξ_n tal que

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

Según hemos precisado, $f(a)=g(a)=0$, por lo tanto,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \tag{1}$$

Sea ahora en la fórmula (1) $n \to \infty$. Entonces, evidentemente, $\xi_n \to a$ para $n \to \infty$ (fig 148). Puesto que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, el

Fig. 148

segundo miembro de la fórmula (1) tiene para $n \to \infty$ el límite igual a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Por consiguiente, para $n \to \infty$ existe también el límite del primer miembro de la fórmula (1), con la particularidad de que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Puesto que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria de los valores del argumento, la cual converge hacia a, de aquí sacamos la conclusión de que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe y } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

El teorema demostrado suele llamarse *regla de L'Hospital*.

○ **Ejemplo 1.** Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Resolución. Las funciones $f(x)=x^2-1+\ln x$ y $g(x)=e^x-e$ están definidas en el entorno del punto $x=1$. Luego, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=\lim\limits_{x \to 1} g(x)=0$, o sea, tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. El límite de la razón de sus derivadas existe:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x \to 1} \frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e},$$

con la particularidad de que $g'(x) = e^x \neq 0$. Por consiguiente, estas funciones satisfacen las hipótesis del teorema de L'Hospital según el cual $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe y es igual a $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, o sea,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1+\ln x')}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1/x}{e^x} = \frac{3}{e}. \quad \bullet$$

Observación 1. Por lo general, al calcular los límites con ayuda de la regla de L'Hospital, se escriben solamente las transformaciones necesarias y la verificación del cumplimiento de las hipótesis se hace en el curso de cálculos. Si en este caso resulta que la razón de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vuelve a representar una indeterminación y $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen los mismos requisitos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la regla de L'Hospital se emplea repetidamente.

● **Ejemplo 2.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

En este ejemplo la regla de L'Hospital se ha empleado dos veces. ●

Ejercicios. Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{2}.\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. (*Resp.* 1). **3.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{3}{5}.\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. (*Resp.* 2.) **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-(e^x+e^{-x})\cdot\cos x}{x^4}$.
$\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{3}.\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x-\operatorname{sen} x}$. (*Resp.* 1.)

Observación 2. El teorema queda justo también en el caso cuando $x\to\infty$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$. Por ejemplo, en efecto, supongamos, que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito o infinito). Hagamos la sustitución $x = 1/t$; entonces $t\to 0$ para $x\to\infty$ y

$$f(x) = f(1/t)\to 0,\ g(x) = g(1/t)\to 0 \text{ para } t\to 0.$$

Aplicando a las funciones $f(1/t)$ y $g(1/t)$ el teorema 5.10 y la regla de derivación de una función compuesta, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

○ **Ejemplo 3.** Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\ln 1=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$. Aplicando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2-1}{x^2+1}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x^2}{1+1/x^2}=-\frac{1-0}{1+0}=-1. \bullet$$

Ejercicios. Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg}x}$. (*Resp.* 0.)
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2}{3}.\right)$

2. Evaluación de la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para esta indeterminación es válida la afirmación análoga al teorema 5.10, a saber: si en el enunciado del teorema sustituir la exigencia de $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ por la hipótesis de $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, el téorema queda válido.

○ **Ejemplo 4.** Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hospital n veces, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}.$$

Aquí ya no hay ninguna indeterminación. Por esta razón

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0. \bullet$$

Ejercicios. Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$. (*Resp.* 0.) **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$. (*Resp.* $+\infty$.) **4.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$. (*Resp.* 0.) **5.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$. (*Resp.* 1.) **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x}$. (*Resp.* $+\infty$.) **7.** $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. (*Resp.* 1.)

3. Otras formas de las indeterminaciones y su evaluación. Como se sabe, *las indeterminaciones de la forma* $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ pueden reducirse a las de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ y luego evaluarse con ayuda de la regla de L'Hospital.

○ **Ejemplo 5.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Pero $x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$ y hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Empleando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Ejemplo 6. Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Pero $\sec x-\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}$ y hemos obtenido para la misma hipótesis de $x\to\pi/2$ la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg}x) = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen}x} = 0.$$

Ejercicios. Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arcsen}x\cdot\operatorname{ctg}x)$. (*Resp.* 1.) **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2}{\pi}.\right)$ **4.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{2}.\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{2}.\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{x}\right)$. (*Resp.* 0.)

Por último, consideremos *las indeterminaciones de la forma* 0^0, 1^∞, ∞^0. Tales indeterminaciones tienen lugar al examinar las funciones $y = f(x)^{g(x)}$ si para $x\to a$ la función $f(x)$ tiende, respectivamente, a 0, 1 y ∞, mientras que $g(x)$ tiende, respectivamente a 0,

∞ y 0. Estas indeterminaciones con ayuda de la identidad

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

se reducen a la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ la cual ya ha sido analizada.

● **Ejemplo 7.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Resolución. Tenemcs una indeterminación de la forma 0^0. Pero $x^x = e^{x\ln x}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ que ya ha sido considerada (véase el ejemplo 5). Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 8. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{1/e^x-1-x}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma 1^∞. Pero $(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)} = e^{\ln(1+x^2)/(e^x-1-x)}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Empleando la fórmula de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^2.$$

Ejemplo 9. Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma ∞^0. Pero

$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln\operatorname{tg} x} = e^{\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{1/\cos x}}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hospital, encontramos

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}} = 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sec x} = 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x} = 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= 2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \cos x = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1. \quad \bullet$$

Ejercicios. Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen}x)^x$. (*Resp.* 1.) **2.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{sen}2x}$. (*Resp.* 1.) **3.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$. (*Resp.* 1.)

Recomendamos para adquirir los hábitos de evaluación de una indeterminación con ayuda de la regla de L'Hospital utilizar también los ejemplos dados en el cap. 4.

En conclusión examinemos un ejemplo cuando la regla de L'Hospital es inaplicable.

○ **Ejemplo 10.** Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, aquí la regla de L'Hospital no se puede aplicar, es decir, el límite de la razón de las derivadas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\operatorname{sen}x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

no existe. Para evaluar la indeterminación dada dividamos el numerador y el denominador por x, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+$$

$$+\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1+0=1. \quad \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese el teorema de L'Hospital para los casos cuando $x\to a^-$ y $x\to a^+$.

2. Enúnciese la regla de L'Hospital para la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x\to a$.

3. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe. ¿Se deduce de aquí que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ que representa la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ también no existe?

4. ¿Por qué en el teorema de L'Hospital no se exige que las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existan obligatoriamente en el mismo punto a?

§ 14. Fórmula de Taylor

Analicemos una de las fórmulas principales del análisis matemático la cual tiene numerosas aplicaciones tanto en el mismo análisis como en las disciplinas contiguas.

1. Fórmula de Taylor.

Teorema 5.11. (teorema de Taylor) [1]. *Supongamos que la función $f(x)$ tiene en el punto a y en cierto entorno suyo derivadas de orden $n+1$* [2]. *Sea x todo valor del argumento del entorno indicado, $x \neq a$. Entonces entre los puntos a y x habrá un punto ξ tal que sea válida la siguiente fórmula:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (1)$$

□ **Demostración.** Designemos con $\varphi(x, a)$ el polinomio respecto a x de orden n en el segundo miembro de la fórmula (1), es decir, pongamos

$$\varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Se llama *polinomio de Taylor de orden n* para la función $f(x)$.)

Luego, designemos con $R_{n+1}(x)$ la diferencia

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a).$$

El teorema quedará demostrado si determinemos que

$$R_{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < \xi < x.$$

Fijemos todo valor de x del entorno indicado. Para precisar, suponemos $x > a$. Designemos con t la variable que varía sobre el segmento $a \leqslant t \leqslant x$ y consideremos sobre el segmento $[a, x]$ la función auxiliar

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{(n+1)}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (2)$$

La función $F(t)$ satisface sobre $[a, x]$ todas las hipótesis del teorema de Rolle: 1) de la fórmula (2) y de las condiciones impuestas a la función $f(x)$ se deduce que $F(t)$ es continua y derivable sobre $[a, x]$, ya que $f(t)$ y sus derivadas hasta el orden n son continuas y derivables sobre $[a, x]$;

[1] Brook Taylor (1685 — 1731), matemático inglés.

[2] De aquí se desprende que la misma función $f(x)$ y sus derivadas hasta el orden n son continuas y derivables en este entorno.

2) suponiendo en (2) $t = a$, tenemos

$$F(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0.$$

Suponiendo en (2) $t = x$, resulta

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Por lo tanto, la condición de $F(a) = F(x)$ queda cumplida.

En virtud del teorema de Rolle dentro del segmento $[a, x]$ existe un punto ξ tal que

$$F'(\xi) = 0. \tag{3}$$

Calculemos la derivada $F'(t)$. Derivando la igualdad (2) respecto a t, tenemos

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) -$$

$$- \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} -$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{(n+1)}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

No es difícil notar que todos los términos en el segundo miembro de la igualdad, a excepción de dos últimos, se eliminan recíprocamente. De esta manera,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \tag{4}$$

Suponiendo en (4) $t = \xi$ y utilizando la igualdad (3), obtenemos

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

De donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \ \blacksquare$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de Taylor* y la expresión para $R_{n+1}(x)$, *término residual en la fórmula de Lagrange*. Éste puede ser escrito en otra forma. Puesto que el punto $\xi \in (a, x)$, habrá también tal número θ del intervalo $0 < \theta < 1$ que $\xi = a + \theta(x-a)$ y el término residual toma la forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Esta fórma del término residual es la más usada en las aplicaciones.

2. Otra notación de la fórmula de Taylor y del término residual. La fórmula de Taylor (1) se escribe frecuentemente de otra manera. Pongamos en (1) $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$. Entonces obtenemos

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$
$$0<\theta<1. \qquad (5)$$

Para $n = 0$ de (5) se obtiene la fórmula de Lagrange

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\,\Delta x.$$

Mostremos que si la función $f^{(n+1)}(x)$ está acotada en el entorno del punto a, el término residual $R_{n+1}(x)$ es infinitésimo de un orden superior que $(x-a)^n$ cuando $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)=0,$$

ya que la función $f^{(n+1)}(\xi)$ está acotada y $(x-a)\to 0$ cuando $x \to a$. Así pues,

$$R_{n+1}(x)=o[(x-a)^n] \text{ para } x\to a. \qquad (6)$$

La fórmula (6) se llama término residual en la forma de Peano [1]).

3. Fórmula de Maclaurin. Suele llamarse *fórmula de Maclaurin* [2]) a la de Taylor (1) cuando $a = 0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

El término residual se escribe:

1) *en la forma de Lagrange* $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$;

2) *en la forma de Peano* $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

4. Desarrollo de algunas funciones elementales según la fórmula de Maclaurin.

1) $f(x)=e^x$. Puesto que

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

---

[1]) Giuseppe Peano (1858 — 1932), matemático italiano.
[2]) Colin Maclaurin (1698 — 1746), matemático escocés.

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \quad (7)$$

2) $f(x) = \operatorname{sen} x$. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } n \text{ impar,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \quad (8)$$

3) $f(x) = \cos x$. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ impar,} \\ (-1)^{n/2} & \text{para } n \text{ par,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \quad (9)$$

En la fórmula (8) hemos escrito el término residual en la forma $o(x^{2n})$ y no en la forma $o(x^{2n-1})$, ya que el término que va en pos del último es igual a cero (lo mismo se refiere a la fórmula (9)).

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$, donde α es un número real. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1),$$

la fórmula de Maclaurin tiene el aspecto

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}^{(x)},$$

donde el término residual en la forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

En el caso particular, cuando $\alpha = n$ es un número natural, $f^{(n+1)}(x) = 0$, por lo tanto, $R_{n+1}(x) = 0$ y hemos obtenide la conocida fór-

mula del binomio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{10}$$

Si es necesario obtener el desarrollo del binomio $(a+x)^n$, se puede sacar a^n fuera del paréntesis y hacer uso de la fórmula (10). En este caso obtenemos

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n =$$

$$= a^n\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Por lo tanto, el caso general de binomio de Newton es un caso particular de la fórmula de Maclaurin.

Los desarrollos anteriormente citados muestran que con ayuda de la fórmula de Maclaurin las funciones pueden reemplazarse, con cierto grado de precisión, por los polinomios que son las funciones elementales más simples. Con los polinomios es cómodo cumplir las operaciones aritméticas, derivarlos; el polinomio es continuo en todo punto, etc. Las fórmulas de Taylor y de Maclaurin permiten sustituir aproximadamente por los polinomios también funciones más complicadas. Además, estas fórmulas tienen un amplio círculo de aplicaciones. Nos limitaremos a considerar dos de ellas.

5. Utilización de la fórmula de Maclaurin para calcular los límites. La fórmula de Taylor es un medio eficaz para calcular los límites de las funciones los cuales se necesita examinar con frecuencia al investigar las funciones.

Examinemos los ejemplos.

○ 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$. Según la fórmula (8) tomada para $n=2$ tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1} =$$

$$= -\frac{1}{3!}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!}+0 = -\frac{1}{6}.$$

2. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3 \operatorname{sen} x}$. Mediante las fórmulas (7) — (9) obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^3(x+o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{1+\frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+0}{1+0} = \frac{1}{12}.$$

3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$. Según las fórmulas (7) y (8) tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{1}{6}+0}=2. \bullet$$

6. Cálculo del número e. En el subp. 2 del § 3, cap. 3 hemos introducido el número e como límite de la sucesión $\{(1+1/n)^n\}$ y hemos obtenido para e una estimación muy aproximada de la forma $2\leqslant e\leqslant 3$.

Mostremos cómo el número e se calcula con toda precisión necesaria. Para esto escribamos la fórmula (7) con el término residual en la forma de Lagrange

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1. \qquad (11)$$

Si la función e^x se reemplaza por su polinomio de Taylor de grado n, obtenemos la igualdad aproximada

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \qquad (12)$$

cuyo error absoluto

$$|R_{n+1}^{(x)}|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Si se considera la función e^x para $-1\leqslant x\leqslant 1$, entonces

$$|R_{n+1}^{(x)}|\leqslant\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}. \qquad (13)$$

Suponiendo en (12) $x=1$, obtenemos el valor aproximado del número

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

En este caso el valor absoluto es menor que $\frac{3}{(n+1)!}$. Si se necesita calcular el valor de e con exactitud hasta 0,001, el número n se determi-

na de la desigualdad

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001 \text{ o bien } (n+1)! > 3000$$

que se cumple para $n = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

con precisión hasta 0,001.

Por lo tanto, la utilización de la fórmula de Maclaurin ofrece la posibilidad de calcular el número e con toda exactitud.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de Taylor.
2. ¿Qué se llama polinomio de Taylor de grado n para la función $f(x)$?
3. Obténgase el término residual de la forma de Peano de la de Lagrange.
4. ¿Qué se llama fórmula de Maclaurin para la función $f(x)$? Escríbase los términos residuales de esta fórmula en las formas de Lagrange y de Peano.
5. ¿Por qué no se puede llamar polinomio de grado $n + 1$ al segundo miembro de la fórmula de Taylor (1)?
6. ¿En qué caso se anula el término residual en la fórmula de Taylor? Cítese un ejemplo.
7. ¿Qué hipótesis falta en el enunciado del teorema de Taylor para deducir el término residual en la forma de Peano? Enúnciese esta hipótesis.

§ 15. Investigación del comportamiento de las funciones y construcción de las gráficas

1. Criterio de monotonía de una función.

Teorema 5.12. *Si una función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) \geqslant 0$, ($f'(x) \leqslant 0$) en (a, b), la función $f(x)$ no decrece (no crece) en (a, b).*

□ **Demostración.** Para precisar, consideremos el caso $f'(x) \geqslant 0$. Sean x_1 y x_2 dos puntos arbitrarios de (a, b) y $x_1 < x_2$; entonces sobre el segmento $[x_1, x_2]$ se cumplen todas las hipótesis del teorema de Lagrange según el cual tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2).$$

Conforme a la suposición $f'(c) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$, por eso $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ o bien $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, o sea la función $f(x)$ no decrece sobre (a, b).

Para el caso de $f'(x) \leqslant 0$ la demostración es análoga. ■

Observación. Del mismo modo se puede demostrar que si $f'(x) > 0$ (< 0) en (a, b), entonces $f(x)$ crece (decrece) en (a, b).

○ **Ejemplo 1.** Determinar los intervalos en sentido lato en los cuales la función $f(x) = x^3 - 12x + 11$ crece y decrece.

Resolución. El dominio de definición de la función es toda la

recta numérica. Encontramos la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 - 12$. De la desigualdad $3x^2 - 12 > 0$ o bien $x^2 > 4$ o $\sqrt{x^2} > 2$, es decir, $|x| > 2$ (sea $x > 2$, sea $x < -2$), se deduce que la función dada crece en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y de la desigualdad $3x^2 - 12 < 0$, o $x^2 < 4$, o bien $\sqrt{x^2} < 2$, es decir, $|x| < 2$ $(-2 < x < 2)$, se deduce que la función dada decrece sobre el intervalo $(-2, 2)$. ●

Ejercicios. Determinar los intervalos en sentido lato en los cuales crecen y decrecen las siguientes funciones: **1.** $f(x) = 3x^2 - 2x$. (*Resp.* Crece sobre el intervalo $(1/3, +\infty)$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, 1/3)$.) **2.** $f(x) = 2 - 3x + x^3$. (*Resp.* Crece sobre $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, decrece en $(-1, 1)$.)

2. Determinación de los puntos del extremo local de una función.

Definición. *El punto x_0 se llama punto del máximo (mínimo) local estricto de la función $f(x)$ si para todos los valores de x de cierto*

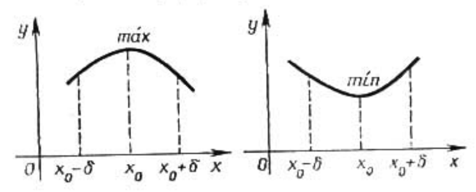


Fig. 149

δ-entorno del punto x_0 se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ para $x \neq x_0$ (fig. 149).

El máximo local (máx) y el mínimo local (mín) se unen por el nombre común de *extremo local*.

De la definición se deduce que el concepto de extremo lleva el carácter local que se entiende así que en el caso del extremo la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ no está obligada a cumplirse para todos los valores de x en el dominio de definición de la función sino debe cumplirse sólo en cierto entorno del punto x_0. Es evidente que la función puede tener varios máximos locales y varios mínimos locales, con la particularidad de que puede resultar que algún máximo local sea menor que cierto mínimo local.

Teorema 5.13 (condición necesaria de un extremo local). Si *la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un extremo local y es derivable en este punto, entonces $f'(x_0) = 0$.*

□ **Demostración.** Puesto que en el punto x_0 la función $f(x)$ tiene un extremo local, existe tal intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el cual el valor $f(x_0)$ sea el máximo (mínimo) entre todos los otros valores de esta función. Entonces, conforme al teorema de Fermat, la

derivada de la función en el punto x_0 es igual a cero, o sea, $f'(x_0) = 0$. ■

El teorema 5.13 tiene el siguiente significado geométrico. Si x_1, x_2 y x_3 son los puntos del extremo local y en los puntos correspondientes de la gráfica existen tangentes, estas tangentes son paralelas al eje Ox (fig. 150).

A veces tales puntos se llaman *estacionarios*; los llamaremos *puntos de extremo posible*. Si el punto x_0 es punto de extremo posible, o sea $f'(x_0) = 0$, él puede también no ser punto de máximo (mínimo) local. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2 = 0$ para $x = 0$, pero, no obstante, en el punto $x = 0$ no hay un extremo local

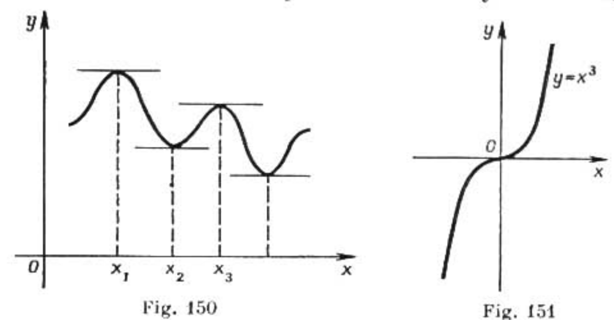


Fig. 150

Fig. 151

(fig. 151). Precisamente por eso los hemos nombrado puntos de extremo posible y la condición de $f'(x_0) = 0$ es sólo necesaria. Vamos a determinar la condición suficiente de existencia del extremo local.

Teorema 5.14 (condición suficiente de un extremo local). *Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cierto δ-entorno del punto x_0. Entonces, si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todos los valores de x de $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) para todos los valores de x de $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces en el punto x_0 la función $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) local; en cambio, si $f'(x)$ tiene en todo el δ-entorno del punto x_0 el mismo signo, en el punto x_0 no hay un extremo local.*

Con otras palabras, si al pasar por el punto x_0 $f'(x)$ cambia su signo de + − a, x_0 es punto de máximo local, si en el punto x_0 $f'(x)$ cambia su signo de − a +, x_0 es punto de mínimo local; en cambio, si en el punto x_0 el signo de $f'(x)$ queda sin variar, en el punto x_0 no existe un extremo.

□ **Demostración.** Supongamos que al pasar por el punto x_0 $f'(x)$ cambia su signo de + a − y sea $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Apliquemos la fórmula de Lagrange a la función $f(x)$ en el segmento $[x, x_0]$. Resulta

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x), \quad c \in (x, x_0).$$

Puesto que $f'(x) > 0$ sobre $(x_0 - \delta, x_0)$, entonces $f'(c) > 0$ y, además, $x_0 - x > 0$, por lo tanto,

$$f(x_0) - f(x) > 0 \text{ o bien } f(x_0) > f(x). \quad (1)$$

Consideremos ahora el intervalo a la derecha del punto x_0, o sea, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Apliquemos la fórmula de Lagrange a la función $f(x)$ sobre el segmento $[x_0, x]$. Obtenemos

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x).$$

Puesto que $f'(x) < 0$ sobre $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces $f'(c) < 0$ y, además, $x - x_0 > 0$, por lo tanto,

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ o bien } f(x_0) > f(x). \quad (2)$$

De las desigualdades (1) y (2) se deduce que en el entorno dado del punto x_0 se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ para $x \neq x_0$

Fig. 152

y esto quiere decir que en el punto x_0 la función $f(x)$ tiene un máximo local.

Análogamente se considera el caso de cambio del signo de $f'(x)$ de $-$ a $+$.

Nos queda considerar el caso cuando $f'(x)$ no cambia su signo.

Sea $f'(x) > 0$ en cierto entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, conforme al teorema 5.12 (de acuerdo con el criterio de monotonía), la función $f(x)$ no decrece en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, o sea, para todos valores de $x < x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ y para todos valores de $x > x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) > f(x_0)$. **Esto quiere decir que el punto x_0 no es punto de extremo local, o sea, al pasar por éste en el caso dado no se conserva el signo de diferencia $f(x) - f(x_0)$ en el entorno de este punto.** ■

Observación. El teorema 5.14 queda válido si en el mismo punto x_0 la función $f(x)$ no es derivable sino sólo continua. De ejemplo de tal función sirve $f(x) = |x|$ la cual en el punto $x = 0$ es continua, pero no derivable.

○ A título de ejemplo consideremos la cuestión de la determinación de los puntos de extremo local de la función $f(x) = x^3 - 3x$. Encontramos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Resolviendo la ecuación $3(x^2 - 1) = 0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Es cómodo realizar la investigación ulterior haciendo un dibujo auxiliar (fig. 152). Marcando en el di-

bujo los puntos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ e investigando el signo de $f'(x)$ en el entorno de estos puntos, obtenemos que en el punto $x_1 = -1$ $f(x)$ tiene un máximo local y en el punto $x_2 = 1$, un mínimo local. Nos queda hallar $y_{\text{máx}}$ e $y_{\text{mín}}$. Tenemos $y_{\text{máx}} = f(-1) = 2$, $y_{\text{mín}} = f(1) = -2$.

En la fig. 152 se ven también los intervalos de monotonía de $f(x)$: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, con la particularidad de que en los intervalos primero y tercero la función crece y en el segundo decrece. ●

3. Problemas del máximo y del mínimo. Los problemas en que se necesita hallar para qué valores del argumento cierta función toma el valor máximo (mínimo) desempeñan gran papel en la matemática y sus aplicaciones. *Desde el punto de vista matemático los problemas más sencillos son tales en los que la función es representada por*

Fig. 153

Fig. 154

una fórmula y es en este caso derivable. Entonces para investigar las propiedades de la función, determinar los trozos de su crecimiento y decrecimiento y encontrar los puntos de local extremo la derivada tiene importancia esencial.

○ **Ejemplo 2.** Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes: 1) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$; 3) $f(x) = (x-2)^5$.

Resolución. 1) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica, ya que $x^2 - x + 3 > 0$ para cada x. Encontramos la derivada: $f'(x) = \frac{3(2x-1)}{(x^2 - x + 3)^2}$. Resolviendo la ecuación $3(2x - 1) = 0$, obtenemos el punto de extremo posible $x = 1/2$. Investigado el signo de $f'(x)$ en el dibujo auxiliar (fig. 153) en el entorno del punto $x = 1/2$, resulta que en este punto la función dada tiene un mínimo local y $f(1/2) = -1/11$, el valor mínimo de la función.

2) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica. Encontramos la derivada: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Resolviendo la ecuación $12x(x^2 - x - 2) = 0$, obtenemos tres puntos de extremo posible: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Investigado el signo de $f'(x)$ (fig. 154) en el entorno de estos puntos, resulta que $x_1 = -1$ y $x_3 = 2$ son los puntos de mínimo local, $f(-1) = -3$ y $f(2) = -30$ son los valores mínimos de la función, $x_2 = 0$ es el

punto de máximo local y $f(0) = 2$, el valor máximo de la función en este punto.

3) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica. Encontramos la derivada: $f'(x) = 5(x-2)^4$. La derivada se anula en el único punto $x = 2$. Puesto que $f'(x)$ es positiva tanto a la izquierda de este punto como a su derecha, o sea al pasar por el punto $x = 2$ no cambia de signo, la función dada no tiene puntos de extremo.

Signo de S(R) S – – – – + + + + + + 0 $\sqrt[3]{V/2\pi}$ R

Fig. 155

Ejemplo 3 (problema de la «mejor» lata de conservas). Hallar la mejor variante de fabricación de una lata de conservas de volumen fijo V que tiene la forma de cilindro circular recto y la superficie mínima S (para su fabricación debe utilizarse la cantidad mínima de hojalata).

Resolución. Escribamos las fórmulas para el volumen de la lata y para el área de su superficie:

$$V = \pi R^2 \cdot h, \quad S = 2\pi R^2 + 2\pi R h.$$

Expresando la altura de la lata h por el radio $h = V/(\pi R^2)$ y sustituyendo la expresión obtenida en la fórmula para la superficie, obtenemos

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad 0 < R < \infty.$$

Así pues, el problema de la «mejor» lata de conservas se reduce a la determinación de tal valor de R con el cual alcanza su valor mínimo la función $S(R)$. Calculemos la derivada de la función $S(R)$:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V).$$

Resolviendo la ecuación $\frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V) = 0$, obtenemos el punto de extremo posible $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Investiguemos el signo de la derivada en el entorno de este punto (fig. 155). Para $0 < R < \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ la derivada es negativa y la función $S(R)$ decrece, para $\sqrt[3]{V/(2\pi)} < R < +\infty$ la derivada es positiva y la función $S(R)$ crece. Por consiguiente, $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ es el punto de mínimo local y $S(\sqrt[3]{V/(2\pi)}) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ es el valor mínimo de la función en este punto.

Así pues, el radio de la lata y su altura, mejores desde el punto de vista de la condición de mínimo de $S(R)$, se determinan por las fórmulas $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2R$, o sea, la altura de la «mejor» lata es igual a su diámetro.

Se puede ampliar el problema planteado. Por ejemplo, considerar otra variante: hallar la mejor forma de una lata de conservas de volumen fijo V que tenga la longitud mínima de todas sus costuras l (es necesario minimizar el trabajo de soldadura de las costuras). Resuelva este problema por sí mismo. Notemos que la longitud de las costuras se expresa por la fórmula $l = 4\pi R + h$ y el radio de la lata y su altura, siempre que éste tenga la longitud mínima de sus costuras, se determinan por las fórmulas: $R = \sqrt[3]{V/(2\pi^2)}$, $h = 2\pi R$.●

4. Sentido de convexidad y puntos de inflexión de la gráfica de una función. Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre

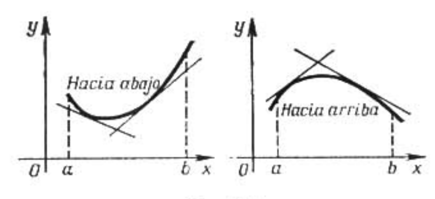


Fig. 156

el intervalo (a, b). Entonces existe la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en todo punto $M(x; f(x))$ de esta gráfica ($a < x < b$), con la particularidad de que la tangente no es paralela al eje Oy, puesto que su coeficiente angular, igual a $f'(x)$, es finito.

Definición 1. *Diremos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene sobre (a, b) una convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba) si esta gráfica está dispuesta no inferior (no superior) a toda tangente a la gráfica de la función sobre (a, b)* (fig. 156).

De la definición se deduce que en el trozo de convexidad las tangentes a la gráfica de la función no se intersecan con la misma gráfica y tienen con éste sólo puntos de tangencia.

Teorema 5.15. *Si la función $y = f(x)$ tiene sobre el intervalo (a, b) la derivada segunda y $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) en todos los puntos de (a, b), la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene en (a, b) una convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba).*

□ **Demostración.** Para precisar, consideremos el caso de $f''(x) \geqslant 0$ sobre (a, b). Designemos con c un punto arbitrario de (a, b) (fig. 157). Se necesita demostrar que la gráfica de la función $y = f(x)$ está no inferiormente que la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$.

Escribamos la ecuación de esta tangente, designando la ordenada corriente de sus puntos con Y: $Y - f(c) = f'(c)(x - c)$ o bien

$$Y = f(c) + f'(c)(x - c). \tag{3}$$

Desarrollemos la función $y = f(x)$ en el entorno del punto c según la fórmula de Taylor para $n = 1$. Resulta

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \quad \xi \in (c, x). \qquad (4)$$

Puesto, según la suposición, $f(x)$ tiene $f''(x)$ sobre (a, b), entonces, conforme al teorema de Taylor, la fórmula (4) es válida para cada x de (a, b). Sustrayendo la igualdad (3) de la (4), tenemos

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2. \qquad (5)$$

Puesto que, según la hipótesis, $f''(x) \geqslant 0$ sobre (a, b), el segundo miembro de la igualdad (5) no es negativo, o sea, $y - Y \geqslant 0$ para todos los valores de x de (a, b) o bien $y \geqslant Y$. La última desigualdad

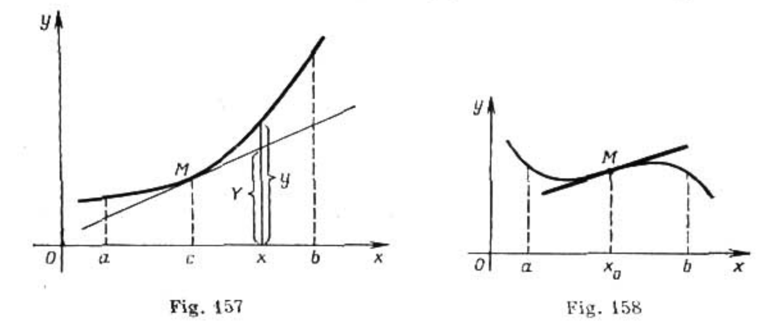


Fig. 157 Fig. 158

demuestra precisamente que la gráfica de la función $y = f(x)$ está, por doquier dentro de los límites de (a, b) no inferior que la tangente (3).

Análogamente se demuestra el teorema para el caso $f''(x) \leqslant 0$. ■

Definición 2. *El punto $M(x_0; f(x_0))$ se llama punto de inflexión de la gráfica de una función $y = f(x)$ si en el punto M la gráfica tiene una tangente y existe tal entorno del punto x_0 dentro de los límites del cual la gráfica de la función $y = f(x)$, tiene, a la izquierda del punto x_0 y a su derecha, los sentidos opuestos de convexidad.*

Es evidente que en el punto de inflexión la tangente corta la gráfica de la función, ya que por un lado de este punto el gráfico se halla debajo de la tangente y por otro, por encima de ésta, o sea, en el entorno del punto de inflexión la gráfica de la función pasa geométricamente de un lado de la tangente a su otro lado y «se dobla» en ella (fig. 158).

Teorema 5.16 (condición necesaria del punto de inflexión). *Supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la inflexión en el*

punto $M(x_0; f(x_0))$ y la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 la segunda derivada continua. Entonces $f''(x)$ se anula en el punto x_0, o sea, $f''(x_0) = 0$.

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que $f''(x_0) \neq 0$. Entonces, en virtud de la continuidad de la derivada segunda, conforme al teorema 4.9 sobre la estabilidad del signo de una función continua, existe cierto entorno del punto x_0 en el cual $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) y, por lo tanto, según el teorema 5.15, la

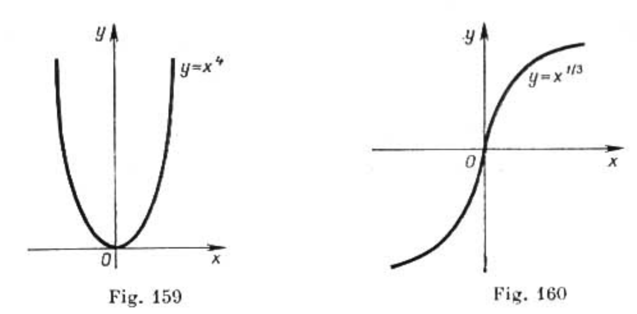


Fig. 159 Fig. 160

gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un sentido determinado de convexidad en este entorno. Pero esto contradice la existencia de la inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. La contradicción obtenida demuestra el teorema. ■

Cabe notar que no todo punto $M(x_0; f(x_0))$, para el cual $f''(x_0) = 0$, es punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^4$ no tiene una inflexión en el punto $(0; 0)$, aunque $f''(x) = 12x^2 = 0$ para $x = 0$ (fig. 159). Por esta razón el hecho de que la segunda derivada vale cero es sólo la condición necesaria de inflexión. Llamaremos *críticos* los puntos $M(x_0; f(x_0))$ de la gráfica para los cuales $f''(x_0) = 0$. Es preciso investigar adicionalmente la cuestión sobre la existencia de la inflexión en cada punto crítico para lo cual conviene determinar la condición suficiente de inflexión.

Teorema 5.17 (condición suficiente del punto de inflexión). *Supongamos que la función $f(x)$ tiene la segunda derivada en cierto entorno del punto x_0. En este caso si dentro de los límites del entorno indicado $f''(x)$ tiene signos opuestos a la izquierda del punto x_0 y a su derecha, la gráfica $y = f(x)$ tiene una inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$.*

□ **Demostración.** Del hecho de que $f''(x)$ tiene signos contrarios a la izquierda del punto x_0 y a su derecha, apoyándonos en el teorema 5.15 concluimos que el sentido de convexidad de la gráfica de la

función es opuesto a la izquierda del punto x_0 y a su derecha. Esto significa precisamente la existencia de la inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. ■

Observación. El teorema queda cierto si $f(x)$ tiene la segunda derivada en cierto entorno del punto x_0, a excepción del mismo punto x_0, y existe la tangente a la gráfica de la función en el punto M. En este caso si dentro de los límites del entorno indicado $f''(x)$ tiene signos contrarios a la izquierda del punto x_0 y a su derecha, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. La demostración de este hecho es análoga a la del teorema.

○ Examinemos un ejemplo: $f(x) = x^{1/3}$. Esta función tiene en el punto $x = 0$ una derivada infinita y la tangente a la gráfica de la

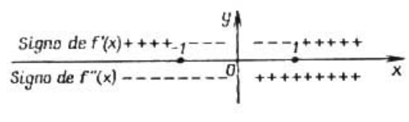


Fig. 161

función en el punto $O(0; 0)$ coincide con el eje Oy. En el punto $x = 0$ la segunda derivada no existe. No obstante, la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene una inflexión en el punto $O(0; 0)$, ya que la segunda derivada $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$ tiene a la izquierda del punto $x = 0$ y a su derecha signos opuestos (fig. 160). ●

Así pues, la cuestión sobre el sentido de convexidad y los puntos de inflexión de la gráfica de una función se investiga con ayuda de la segunda derivada.

○ A título de ejemplo vamos a continuar examinando la función $f(x) = x^3 - 3x$ (véase el subp. 2). Marcaremos el signo de la derivada segunda en un dibujo auxiliar (véase la fig. 152). Encontramos la derivada segunda $f''(x) = 6x$. De la ecuación $6x = 0$ obtenemos un punto crítico: $O(0; 0)$. Marcando el punto $x = 0$ en otro dibujo auxiliar (fig. 161) e investigando el signo de $f''(x)$ en el entorno de este punto, obtenemos: a la izquierda del punto $x = 0$ la derivada $f''(x) < 0$ (la gráfica está orientada con convexidad hacia arriba) y a su derecha $f''(x) > 0$ (el gráfico está orientado con convexidad hacia abajo), o sea, el punto $O(0, 0)$ es punto de inflexión del gráfico de la función en cuestión. Este gráfico está representado esquemáticamente en la fig. 162. ●

Vamos a demostrar ahora que la parte de la elipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ situada en el semiplano superior $(y \geqslant 0)$ tiene sobre el intervalo $(-a, a)$ una convexidad orientada hacia arriba. En

efecto, de la ecuación de la elipse obtenemos $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Luego encontramos

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad y''=-\frac{ba}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

De la expresión para la derivada segunda se desprende que esta derivada es negativa sobre el intervalo $(-a, a)$. Por lo tanto, la curva dada sobre todo el intervalo $(-a, a)$ está orientada con la convexidad hacia arriba (véase la fig. 55).

Análogamente, se puede mostrar que la parte de la hipérbola $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, situada en el semiplano superior sobre los intervalos $(a, +\infty)$ y $(-\infty, -a)$ tiene la convexidad orientada hacia arriba (proponemos que el lector haga esto por sí mismo).

5. Asíntotas de la gráfica de una función. Al investigar el comportamiento de una función en el infinito, o sea, cuando $x\to+\infty$ y

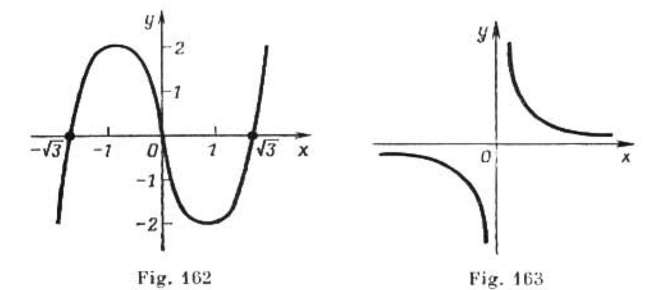


Fig. 162 Fig. 163

cuando $x\to-\infty$ o en la proximidad de los puntos de discontinuidad de segunda especie resulta frecuentemente que el gráfico de la función se aproxima tan cerca como se quiera a una u otra recta. Tales rectas se llaman *asíntotas* [1]).

Existen tres tipos de asíntotas: *verticales, horizontales y oblicuas.*

Definición 1. *La recta $x = x_0$ se llama asíntota vertical de la gráfica de la función $y = f(x)$ si al menos uno de los valores límites $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ es igual a $+\infty$ o a $-\infty$.*

Por ejemplo, el gráfico de la función $y = f(x) = 1/x$ (fig. 163) tiene la asíntota vertical $x = 0$, ya que $f(x)\to+\infty$ para $x\to 0+$ y $f(x)\to-\infty$ para $x\to 0-$.

---

[1]) Con el concepto de asíntota ya nos hemos encontrado en la geometría analítica al considerar la hipérbola (véase el cap. 2, § 6, subp. 2).

Definición 2. *La recta* $y = A$ *se llama asíntota horizontal de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ *si* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$.

Por ejemplo, la gráfica de la función anteriormente examinada $y = 1/x$ tiene la asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$, ya que $1/x \to 0$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

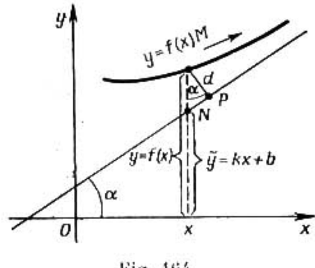


Fig. 164

Definición 3. *La recta* $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ *se llama asíntota oblicua de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ *si la función* $f(x)$ *puede ser representada en la forma*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (6)$$

donde $\alpha(x) \to 0$ *cuando* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Aclaremos el significado geométrico de la asíntota oblicua. Para precisar, consideremos el caso cuando $x \to +\infty$ (el caso $x \to -\infty$ se considera análogamente).

Sea $M(x; y)$ un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$ y supongamos que la recta $\tilde{y} = kx + b$ es asíntota oblicua de la gráfica de la función para $x \to +\infty$. Designemos con $\tilde{y}$ la ordenada corriente del punto sobre la asíntota y con $N(x; \tilde{y})$ el punto sobre la asíntota (fig. 164). Entonces $|MN| = |y - \tilde{y}| = |f(x) - (kx + b)| = |\alpha(x)| \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Bajemos del punto M la perpendicular MP a la asíntota. La distancia d entre el punto M y la asíntota es igual a $|MP| = |MN| \cos\alpha$, donde α es el ángulo comprendido entre la asíntota y el eje Ox y, por consiguiente, $\lim\limits_{x \to +\infty} d = 0$.

Por lo tanto, la distancia del punto $M(x; y)$ de la gráfica de la función a la asíntota tiende a cero cuando $x \to +\infty$, o sea, la gráfica de la función se aproxima indefinidamente a la asíntota para $x \to +\infty$.

Analicemos el método de determinación de la asíntota oblicua, o sea, el método de determinación de los números k y b en la ecuación de la asíntota. Dividiendo la igualdad (6) por x y pasando al límite para $x \to +\infty$, obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k,$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{x}=0$. Así pues,

$$k=\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{7}$$

Luego, de la relación (6) tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty} [b+\alpha(x)]=b.$$

De esta manera,

$$b=\lim_{x\to+\infty} [f(x)-kx]. \tag{8}$$

Hemos demostrado que si la recta $\tilde{y}=kx+b$ es asíntota oblicua, los números k y b se hallan según las fórmulas (7) y (8). Inversamente, si ambos límites (7) y (8) existen, y $k\neq 0$, la recta $\tilde{y}=kx+b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función $y=f(x)$ cuando $x\to+\infty$. En efecto, suponiendo $\alpha(x)=f(x)-kx-b$ y utilizando la igualdad (8), obtenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x)=0$. Por consiguiente, es válida la igualdad $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x)=0$, o sea, la recta $\tilde{y}=kx+b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función para $x\to+\infty$.

Terminando el análisis de la asíntota oblicua, enunciemos el resultado obtenido en forma de un teorema.

Teorema 5.18. *Para que la gráfica de la función $y=f(x)$ tenga, cuando $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), la asíntota oblicua $y=kx+b$, es necesario y suficiente que existan dos límites*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}=k \text{ y } \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx]=b.$$

Es conveniente buscar las asíntotas en el siguiente orden: 1) asíntotas verticales; 2) asíntotas horizontales; 3) asíntotas oblicuas.

○ **Ejemplo 4.** Hallar las asíntotas para la gráfica de la función $y=\frac{x^2+2x-3}{x}$.

Resolución. 1) Encontramos las asíntotas verticales. El punto $x=0$ es punto de discontinuidad de segunda especie de la función dada, con la particularidad de que $y\to+\infty$ cuando $x\to 0-$ e $y\to-\infty$ cuando $x\to 0+$. Por consiguiente, el eje de ordenadas $x=0$ es la asíntota vertical.

2) **Encontramos** las asíntotas horizontales:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^2+2x-3}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(x+2-\frac{3}{x}\right) = \underset{(-\infty)}{+\infty},$$

por lo tanto las asíntotas horizontales no existen.

3) Encontramos las asíntotas oblicuas:

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx] = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\frac{x^2-2x-3}{x}-x\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(\frac{2x-3}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(2-\frac{3}{x}\right) = 2.$$

Por consiguiente, la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la gráfica de la función dada tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

La gráfica de la función está representada esquemáticamente en la fig. 165.

Fig. 165

Ejemplo 5. Demostrar que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tiene por sus asíntotas oblicuas las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Resolución. Puesto que $y = \pm \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, entonces

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right] = \pm\frac{b}{a};$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx] = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\mp\frac{b}{a}x\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\ \sqrt{x^2-a^2}-x)\right] = \pm\frac{b}{a}\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2} = 0.$$

Por consiguiente, las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son **asíntotas oblicuas** de **la** hipérbola dada tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\, \bullet\infty$.

6. Esquema de investigación de la gráfica de una función. En el subpárrafo dado conoceremos el esquema aproximado según el cual es conveniente investigar el comportamiento de una función y construir su gráfica. Para ilustrar aducimos ejemplos.

Es racional estudiar la función dada y construir su gráfica en el

siguiente orden:

1) hallar el dominio de definición de la función;

2) hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas;

3) hallar las asíntotas;

4) hallar los puntos de extremo posible;

5) hallar los puntos críticos;

6) con ayuda de un dibujo auxiliar investigar el signo de las derivadas primera y segunda. Determinar los trozos de crecimiento y de decrecimiento de la función, hallar el sentido de convexidad de la gráfica, los puntos de extremo y los de inflexión;

7) construir la gráfica, teniendo en cuenta la investigación realizada en los subp. 1) a 6).

En este caso al iniciar la investigación es útil verificar si es par o impar la función dada para que durante la construcción se utilice la simetría de la gráfica respecto al eje de ordenadas o respecto al origen de coordenadas.

○ **Ejemplo 6.** Siguiendo el esquema recién expuesto, construir la gráfica de la función

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Resolución. 1) El dominio de definición de la función es el conjunto de todos los números reales, salvo $x=1$ (en este caso el denominador se anula).

2) Puesto que la ecuación $x^2+1=0$ no tiene raíces reales, la gráfica de la función no tiene puntos de intersección con el eje Ox, pero corta el eje Oy en el punto $(0; -1)$.

3) Aclaremos la cuestión sobre la existencia de las asíntotas. Investiguemos el comportamiento de la función cerca del punto de discontinuidad $x=1$. Puesto que $y\to-\infty$ para $x\to 1-$ e $y\to+\infty$ para $x\to 1+$, la recta $x=1$ es la asíntota vertical de la gráfica de la función.

Si $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, entonces $y\to+\infty$ $(y\to-\infty)$, por lo tanto la gráfica no tiene una asíntota horizontal. A continuación, de la existencia de los límites

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+1}{x-1}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x}{1-1/x}=1$$

se desprende que para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua $y=x+1$.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la primera derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Resolviendo la ecuación $x^2-2x-1=0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1=1-\sqrt{2}$ y $x_2=1+\sqrt{2}$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Puesto que $f''(x)$ no se anula, no hay puntos críticos.

Signo de $f'(x)$ + + + + + – – | – – – – ¦ – – – – – + + + + + +

Signo de $f''(x)$ – – – – $1-\sqrt{2}$ – 0 | – – – 1 ¦ + + + + + $1+\sqrt{2}$ + + + x

Fig. 166

6) Vamos a construir un dibujo auxiliar e investigar el signo de las derivadas primera y segunda (fig. 166). Resulta que la función crece sobre $(-\infty,\ 1-\sqrt{2})$, decrece sobre $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ y vuelve a crecer sobre $(1+\sqrt{2},\ +\infty)$. Los puntos de extremo: *máximo* para $x=1-\sqrt{2}$, con la particularidad de que $f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$; *mínimo* para $x=1+\sqrt{2}$, con la particularidad de que $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$. Sobre $(-\infty,\ 1)$ la gráfica tiene una convexidad orientada hacia arriba y sobre $(1,\ +\infty)$, una convexidad orientada hacia abajo.

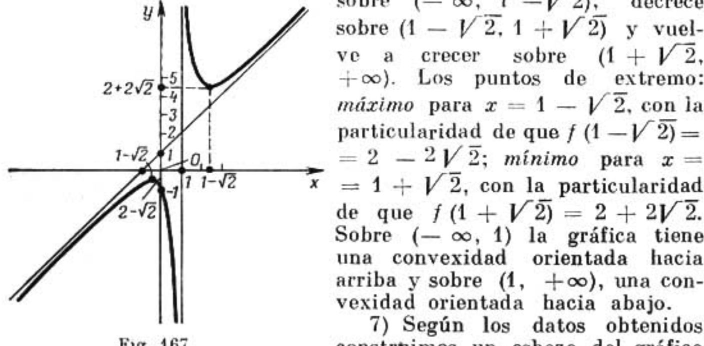


Fig. 167

7) Según los datos obtenidos construimos un esbozo del gráfico (fig. 167).

Ejemplo 7. Construir el gráfico de la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Resolución. 1) El dominio de definición de la función es toda la recta numérica.

2) La gráfica de la función corta el eje Ox en los puntos en que $(x-1)^2=0$, o sea, en el punto que tiene por abscisa $x=1$ y corta el eje Oy en el punto que tiene por ordenada $y=1$.

3) Puesto que la función es continua sobre toda la recta numérica, no hay asíntotas verticales. Luego, de la existencia del límite

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x-2/x^2+1/x^3}{1+1/x^2}=\frac{0}{1}=0$$

se deduce que

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x+1/x^2}{1+1/x^2}=\frac{1-0+0}{1+0}=1,$$

o sea, no hay asíntotas oblicuas y la recta $y=1$ es la asíntota horizontal.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}.$$

Resolviendo la ecuación $2x^2-2=0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1=-1$, $x_2=1$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la derivada segunda

$$f''(x)=\frac{4x(x^2+1)^2-(2x^2-2)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Resolviendo la ecuación $4x(3-x^2)=0$, obtenemos tres puntos críticos: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$.

y
Signo de f'(x) ++++++++ -1 ---- | --- 1 ++++++++
Signo de f''(x) ++++ -√3 ------ 0 | +++++++ √3 ---- x

Fig. 168

6) Construimos un dibujo auxiliar (fig. 168) e investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda.

Resulta que sobre $(-\infty,\ -1)$ la función crece, sobre $(-1,\ 1)$ decrece y sobre $(1,\ +\infty)$ vuelve a crecer. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x=-1$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más

a menos y al pasar por el punto $x = 1$ lo cambia de menos a más, por lo tanto en el punto $x = -1$ es el máximo y en el punto $x = 1$ es el mínimo, con la particularidad de que $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$. En $(-\infty, -\sqrt{3})$ la gráfica está orientada con la convexidad hacia abajo, en $(-\sqrt{3}, 0)$ hacia arriba, en $(0, \sqrt{3})$ hacia abajo y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ otra vez hacia arriba, por lo tanto, los puntos $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$ son las abscisas de los puntos de inflexión, con la particularidad de que $f \times (-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}/2$; $f(0) = 1$, $f(\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}/2$.

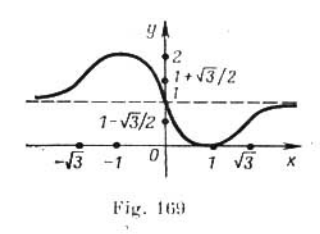


Fig. 169

7) Conforme a los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 169). ●

Ejercicios. Construir las gráficas de las siguientes funciones:
1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. (*Resp.* Para $x=1$ es el mínimo, $f(1)=2$; para $x=-1$ es el máximo, $f(-1)=-2$; $x=0$ es la asíntota vertical, $y=x$ es la asíntota oblicua.)
2. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. (*Resp.* Para $x=0$ es el máximo, $f(0)=0$; para $x=4$ es el mínimo, $f(4)=8$; $x=2$ es la asíntota vertical, $y=x+2$ es la asíntota oblicua.)
3. $f(x) = \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$. (*Resp.* Para $x=-3$ es el máximo, $f(-3)=-49/12$; para $x=1$ es el máximo, $f(1)=5/4$; para $x=2$ es el mínimo, $f(2)=9/8$; el punto $x=9/7$ es la abscisa del punto de inflexión; $f(9/7)=913/756$; $x=0$ es la asíntota vertical, $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ es la asíntota oblicua; $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto de intersección del gráfico con el eje Ox.)

○ **Ejemplo 8.** Construir la gráfica de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Resolución. 1) La función está definida para $x > 0$, o sea, en el intervalo $0 < x + \infty$.

2) La gráfica de la función corta el eje Ox en el punto en que $\ln x = 0$, o sea, en el punto que tiene por abscisa $x = 1$ y no tiene intersecciones con el eje Oy, ya que la función está definida para $x > 0$.

3) Como asíntota vertical sirve la recta $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ (demuéstrese esto por sí mismo). Encontramos las asín-

totas:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 0\cdot x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(aquí también hemos utilizado la regla de L'Hospital).

Por lo tanto, $k = b = 0$, o sea, no hay asíntotas oblicuas; la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Signo de $f'(x)$ ++++e - - - - - - -
Signo de $f''(x)$ 0 - - - - - - $e^{3/2}$ ++++ x

Fig. 170

4) Para encontrar los puntos de extremo posible calculemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Resolviendo la ecuación $1 - \ln x = 0$, obtenemos un punto de extremo posible: $x = e$.

5) Para encontrar los puntos críticos calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Resolviendo la ecuación $2\ln x - 3 = 0$, $\ln x = \frac{3}{2}$, $x = e^{3/2}$, obtenemos un punto crítico $x = e^{3/2}$.

6) En un dibujo auxiliar (fig. 170) investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda.

Resulta que sobre $(0, e)$ la derivada $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1 > 0$, por lo tanto, la función crece; sobre $(e, +\infty)$ la derivada $f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{1 - 2\ln e}{e^4} = \frac{1-2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} < 0$, la función decrece. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x = e$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos, por lo tanto, en el punto $x = e$ es el máximo, con la particularidad de que $f(e) = \frac{1}{e}$. En $(0, e^{3/2})$ la derivada segunda $f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} =$

$= -\frac{1}{e^3} < 0$, la *gráfica tiene una convexidad orientada hacia arriba* y en $(e^{3/2}, +\infty)$ la derivada $f''(e^2) = \frac{2 \ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0$, la gráfica tiene otra convexidad orientada hacia abajo, por lo tanto, el punto $x = e^{3/2}$ es la abscisa del punto de inflexión, con la particularidad de que $f(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}}$. Así pues, el punto $\left(e^{3/2}; \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$ es el punto de inflexión de la gráfica de la función.

7) A base de los datos obtenidos, construimos la gráfica de la función (fig. 171). ●

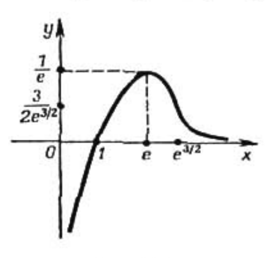


Fig. 171

Ejercicios. Construir las gráficas de las siguientes funciones:
1. $f(x) = x \ln x$. (*Resp*. Para $x = 1/e$ es el mínimo, $f(1/e) = -1/e$; (1; 0) es el punto de intersección de la gráfica con el eje Ox; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.)
2. $f(x) = x - \ln x$. (*Resp*. Para $x = 1$ es el mínimo, $f(1) = 1$; $x = 0$ es la asíntota vertical.)
3. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. (*Resp*. Para $x = 1$ es el máximo, $f(1) = 1$; $x = 0$ es la asíntota vertical, $y = 0$ es la asíntota horizontal; $(e^{1/2}; 3/2e^{1/2})$ es el punto de inflexión, $(1/e; 0)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje Ox.)

○ **Ejemplo 9.** Construir la gráfica de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.
Resolución. 1) El dominio de definición de la función es toda la recta numérica.

2) La gráfica de la función corta los ejes de coordenadas en el punto O (0; 0).

3) Puesto que la función es continua sobre toda la recta numérica, no hay asíntotas verticales. Al buscar las asíntotas oblicuas es necesario considerar por separado los casos $x \to -\infty$, y $x \to +\infty$, tenemos

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = \infty$$

(demuéstrese esto por sí mismo).

Por consiguiente, para $x \to -\infty$ no hay una asíntota oblicua, y puesto que también $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, tampoco exis-

te una asíntota horizontal. Luego tenemos

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(aquí hemos utilizado la regla de L'Hospital); por lo tanto, para $x \to +\infty$ no hay una asíntota oblicua, la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.

4) Para encontrar los puntos de extremo posible, calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x}.$$

Resolviendo la ecuación $x(2-x)e^{-x} = 0$ ($e^{-x} \neq 0$), obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 2 = 0$, obtenemos dos puntos críticos: $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

6) Investiguemos los signos de las derivadas primera y segunda (fig. 172). Resulta que en $(-\infty, 0)$ la función decrece y en $(0, 2)$

Fig. 172

crece y en $(2, +\infty)$ vuelve a decrecer. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x = 0$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de menos a más y al pasar por el punto $x = 2$, de más a menos, por lo tanto, en el punto $x = 0$ es el mínimo y en el punto $x = 2$ es el máximo, con la particularidad de que $f(0) = 0$, $f(2) = 4e^{-2}$. En $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ la gráfica está orientada con la convexidad hacia abajo, en $(2 - -\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ hacia arriba y en $(2+\sqrt{2}+\infty)$, otra vez hacia abajo, por lo tanto, $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$ son las abscisas de los puntos de inflexión, con la particularidad de que $f(2-\sqrt{2}) = = (2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}$, $f(2+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}$.

7) A base de los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 173). ●

Ejercicios. Construir las gráficas de las siguientes funciones:
1. $f(x)=\frac{e^x}{x}$. (*Resp.* Para $x=1$ es el mínimo, $f(1)=e$; no hay puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota vertical; $y=0$ es la asíntota horizontal para $x\to-\infty$.)
2. $f(x)=x^2e^{1/x}$. (*Resp.* Para $x=1/2$ es el mínimo; $f(1/2)=1/4e^2$; no hay puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota vertical para $x\to 0+$, $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2e^{1/x}=0$.)
3. $f(x)=(1-x)\,e^x$. (*Resp.* Para $x=0$ es el máximo; $f(0)=1$; $(-1,\ 2/e)$ es el punto de inflexión; $y=0$ es la asíntota horizontal.)

○**Ejemplo 10.** Construir la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

Resolución. 1) El dominio de determinación de la función es el conjunto de los valores de x que satisfacen la desigualdad $x^2-1\geqslant 0$ o bien $|x|\geqslant 1$, es decir, sea $x\leqslant -1$, sea $x\geqslant 1$. Con otras palabras, la función está definida en dos intervalos en sentido lato: $(-\infty,\ -1]$ y $[1,\ +\infty)$. En este caso no es difícil notar que sobre estos intervalos la función no es negativa.

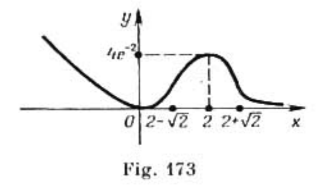


Fig. 173

2) El gráfico de la función no tiene puntos de intersección con los ejes de coordenadas, ya que $x\neq 0$ e $y\neq 0$.

3) Puesto que la función es continua en todos los puntos del dominio de definición, no hay, evidentemente, asíntotas verticales. Buscamos las asíntotas oblicuas:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}{x}=1+1=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2-1}-x)]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0-0=0;$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}{x}=-1-1=-2;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}+2x]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[(\sqrt{x^2+1}+x)+(\sqrt{x^2-1}+x)]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)+\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0-0=0.$$

Ahora bien, obtenemos que la gráfica de la función tiene dos distintas asíntotas oblicuas: $y=2x$ para $x\to+\infty$, e $y=-2x$ para $x\to-\infty$.

Puesto que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no hay asíntotas horizontales.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^4-1}}.$$

No existen puntos extremos, ya que el numerador de la fracción no se anula. Para $x=\pm1$ la derivada $f'(x)=\infty$.

5) Para encontrar los puntos críticos calculemos la derivada segunda:

$$f''(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{(x^2-1)^{3/2}-(x^2+1)^{3/2}}{(x^4-1)\sqrt{x^4-1}}.$$

No hay puntos críticos, ya que el numerador de la fracción no se anula.

6) Investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda (fig. 174). Resulta que sobre $(-\infty, -1]$ la función decrece y la gráfica tiene una convexidad orientada hacia arriba; en $[1, +\infty)$ la función crece y la gráfica tiene otra convexidad también orientada hacia arriba. No existen extremos ni puntos de inflexión. Hagamos un cálculo auxiliar: $f(\pm 1)=\sqrt{2}$.

7) A base de los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 175).

Signo de $f'(x)$ - - - - - y + + + + + +

Signo de $f''(x)$ - - - - -1 1 - - - - - - x

Fig. 174

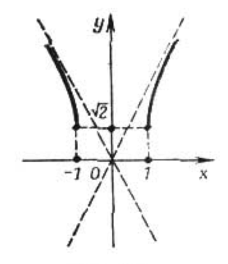


Fig. 175

Ejercicio. Construir la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$. (*Resp*. El dominio de definición: $|x|\geqslant 1$, no hay extremos ni puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota horizontal.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese el teorema 5.12 para el caso de crecimiento de una función.

2. Dése la definición del extremo local de una función.

3. ¿Puede una función tener varios extremos locales?

4. ¿Puede el máximo local de cierta función resultar menor que cualquier mínimo local de la misma función?

5. Enúnciese el teorema que expresa la condición necesaria del extremo local. Citando un ejemplo, muéstrese que esta condición no es suficiente.

6. ¿Qué puntos se llaman puntos de extremo posible de una función?

7. Enúnciese el teorema que expresa la condición suficiente del extremo local.

8. Dése la definición del sentido de convexidad de la gráfica de una función.

9. Enúnciese el teorema con el cual se resuelve la cuestión sobre el sentido de convexidad de la gráfica de una función.

10. Dése la definición del punto de inflexión de la gráfica de una función.

11. Enúnciese la condición necesaria del punto de inflexión de la gráfica de una función. Citando un ejemplo, muéstrese que esta condición no es suficiente

12. ¿Qué puntos se llaman críticos?

13. Enúnciese la condición suficiente del punto de inflexión de la gráfica de una función.

14. ¿Puede una función tener el extremo en el punto de inflexión de la gráfica de la misma?

15. Dése las definiciones de las asíntotas vertical, horizontal y oblicua. Cite ejemplos.

16. *Demuéstrese la afirmación siguiente:* si la recta $y=kx+b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $y=f(x)$ para $x\to+\infty$, existen los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k;\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b \tag{*}$$

e, inversamente, si ambos límites (*) existen, la recta $y = kx + b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \to +\infty$.

17. Exponga el esquema de construcción de la gráfica de una función.

§ 16. Problemas de control

5.1. ¿Con qué valores de x las tangentes a la gráfica de la función $y = x^3 - x$ son paralelas a la recta $y = x$?

5.2. ¿Bajo qué ángulo al eje Ox la curva $y = 2x^3 - x$ corta el eje Oy?

5.3. En los puntos (0; 0), (2; 1), (4; 0) están trazadas las tangentes a la parábola $y = \frac{4x - x^2}{4}$. Halle los ángulos de inclinación de las mismas al eje Ox.

5.4. Escríbase la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $y = \frac{x^3+1}{3}$ en el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas.

5.5. Hállese el ángulo de inclinación que la tangente a la hipérbola $xy = 1$ en el punto (1; 1) tiene al eje Ox.

5.6. ¿Con qué valor de a la curva $y = \frac{ax - x^3}{4}$ corta el eje Ox bajo el ángulo 45° (al menos en uno de los puntos de intersección)?

5.7. ¿Es la recta $y = 3x - 4$ una tangente a la curva $y = x^3 - 2$?

5.8. Plantéese la ecuación de la tangente trazada del punto $M(-1; 3)$ a la hipérbola $y = 1/x$.

5.9. Se dan dos parábolas $y = 8 - 3x - 2x^2$ e $y = 2 + 9x - 2x^2$. Hállese la ecuación de la recta que toca a ambas parábolas.

5.10. Se dan dos rectas $y = -x$ e $y = 5x - 6$. Hállese los valores de los parámetros a y b con los cuales ambas rectas dadas tocan a la parábola $y = x^2 + ax + b$.

5.11. Una circunferencia se da por la ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Hállese las ecuaciones de las tangentes a esta circunferencia en los puntos de su intersección con el eje Ox.

5.12. Cítese un ejemplo (es decir, escríbase la fórmula y constrúyase con esmero la gráfica) de una función definida por doquier que tiene una derivada por doquier, salvo los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

5.13. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

no tiene una derivada en el punto $x = 0$.

5.14. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \text{ es racional,} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

tiene una derivada en el punto $x = 0$.

5.15. Hállese la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y mostrar que su derivada es discontinua en el punto $x = 0$.

5.16. Desarróllese la función $f(x) = \ln(1 + x)$ por la fórmula de Maclaurin con el término residual en la forma de Peano.

5.17. Desarróllese la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ por la fórmula de Maclaurin hasta el término con x^3, inclusivamente.

5.18. Desarróllese mediante la fórmula de Maclaurin las fórmulas siguientes hasta el término de orden indicado, inclusivamente:

a) $f(x) = e^{-x}$ hasta el término con x^2; b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ hasta el término con x^5; c) $f(x) = \ln(\cos x)$ hasta el término con x^4; d) $f(x) = \operatorname{sen}\operatorname{sen} x$ hasta el término con x^3.

5.19. Con ayuda de la fórmula de Maclaurin hállese los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x - 3x}{x^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x^2/2)}{x(\operatorname{sen} x - x)}$.

6

CÁLCULO INTEGRAL

§ 1. Primitiva e integral indefinida

1. Concepto de función primitiva. Uno de los problemas fundamentales del cálculo diferencial consiste en determinar la derivada de una función dada. Variadas cuestiones del análisis matemático y sus numerosas aplicaciones en la geometría, la mecánica, la física y la técnica conducen a la resolución del problema inverso: dada una función $f(x)$, hallar tal función $F(x)$ cuya derivada sea igual a la función $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$.

La reconstrucción de una función a partir de su derivada conocida es uno de los problemas fundamentales del cálculo integral.

Definición 1. *La función $F(x)$ se llama primitiva para la función $f(x)$ en cierto intervalo X si para todos los valores de x de este intervalo se cumple la igualdad $F'(x) = f(x)$.*

Examinemos algunos ejemplos.

○ **1.** La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es primitiva para la función $f(x) = \cos x$ sobre toda la recta, ya que para todo valor de x $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

2. La función $F(x) = x^3$ es primitiva para la función $f(x) = 3x^2$ sobre toda la recta, ya que en cada punto x $(x^3)' = 3x^2$.

3. La función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es primitiva para la función $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $(-1, +1)$, ya que en todo punto x de este intervalo $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ●

El problema de determinar para la función dada $f(x)$ su primitiva no se resuelve unívocamente. Efectivamente, si $F(x)$ es primitiva para $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$, entonces la función $F(x) + C$ donde C es una constante arbitraria, también es derivada para $f(x)$, ya que $[F(x) + C]' = f(x)$ para todo número C. Por ejemplo, para $f(x) = \cos x$ de primitiva sirve no sólo $\operatorname{sen} x$, sino también la función $\operatorname{sen} x + C$, ya que $(\operatorname{sen} x + C)' = \cos x$.

Mostremos ahora que el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde $F(x)$ es cierta primitiva para la función $f(x)$ y C es una constante arbitraria, agota todas las primitivas para la función $f(x)$.

Lema 6.1. *La función cuya derivada sobre cierto intervalo X es igual a cero es constante en este intervalo.*

□ **Demostración.** Supongamos que en todos los puntos del intervalo X la función derivada $f(x)$ es igual a cero, o sea, $f'(x) = 0$. Entonces para todos dos puntos $x_1, x_2 \in X$, según el teorema de Lagrange,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puesto que $f'(\xi) = 0$, entonces $f(x_2) = f(x_1)$. Esto significa precisamente que en todos los puntos del intervalo los valores de la función son iguales, o sea, $f(x) = C$, donde C es cierto número. ■

Teorema 6.1. *Si $F(x)$ es primitiva para una función $f(x)$ en cierto intervalo X, toda otra primitiva para $f(x)$ en el mismo intervalo puede ser representada en la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.*

□ **Demostración.** Sea $\Phi(x)$ toda otra primitiva para la función $f(x)$ sobre el intervalo X, o sea, $\Phi'(x) = f(x)$. Entonces para cada $x \in X$

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

y esto quiere decir (según el lema 6.1) que la función $\Phi(x) - F(x)$ es constante, o sea, $\Phi(x) - F(x) = C$, donde C es cierto número. Por consiguiente, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Del teorema demostrado se deduce que el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde $F(x)$ es una de las primitivas para la función $f(x)$ y C, la constante arbitraria, agota toda la familia de las funciones primitivas para $f(x)$.

2. Integral indefinida.

Definición 2. *Si la función $F(x)$ es primitiva para una función $f(x)$, el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde C es la constante arbitraria, se llama integral indefinida de la función $f(x)$ y se designa con símbolo*

$$\int f(x)\,dx\,^{1)} = F(x) + C. \tag{1}$$

En este caso la función $f(x)$ se llama *función subintegral*; $f(x)\,dx$, *expresión subintegral* o *integrando* y la variable x, *variable de integración*.

Por lo tanto, el símbolo $\int f(x)\,dx$ designa el conjunto de todas las primitivas para la función $f(x)$.

La reconstrucción de una función a partir de su derivada o bien, que es lo mismo, la determinación de una integral indefinida a partir de la función subintegral dada se llama *integración* de esta función. La integración es la operación inversa a la derivación (diferenciación). Para asegurarse de que la integración esté cumplida correcta-

[1]) Se lee: «la integral indefinida de $f(x)$ respecto a dx».

mente, basta derivar el resultado y obtener en este caso la función subintegral.

○ **Ejemplo 1.** Verificar que $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$.

Resolución. Derivando el resultado de integración $(x^3 + C)' = 3x^2$, obtenemos la función subintegral. Por consiguiente la integración está cumplida correctamente. ●

Ejercicios. Verificar que: **1.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

2. $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$. **3.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

4. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$. **5.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. **7.** $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

En relación con el concepto de primitiva surge la pregunta: ¿para qué funciones existen primitivas (y, por lo tanto, también integrales indefinidas)? Aquí sólo señalemos que en el § 4 quedará demostrado que toda función continua sobre un segmento tiene sobre este segmento una primitiva (por consiguiente, también una integral indefinida). A continuación supondremos que todas las funciones que están bajo el signo integral son continuas y la fórmula (1) tiene sentido. En caso de una función discontinua consideraremos su integración sólo en aquellos intervalos en los cuales ésta es continua.

Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es definida y continua para todos los valores de x distintos de cero, o sea, tiene una discontinuidad en el punto $x = 0$ y es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Si $x > 0$, para $f(x) = 1/x$ una de las primitivas es $F(x) = \ln x$, ya que $(\ln x)' = 1/x$. Por lo tanto, para $x > 0$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$$

Si $x < 0$, una de las primitivas para $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln(-x)$, ya que $[\ln(-x)]' = (1/-x)\cdot(-1) = 1/x$. Por lo tanto, para $x < 0$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C.$$

Uniendo ambos casos, obtenemos la fórmula

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x + C & \text{para } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{para } x < 0 \end{cases} = \ln|x| + C.$$

Geométricamente la integral indefinida es un conjunto (familia) de las curvas que no son sino las gráficas de las primitivas

$y = F(x) + C$. Si $y = F(x)$ es cualquier curva, entonces, conforme al teorema 6.1, todas las otras curvas se obtienen de ella por el desplazamiento paralelo a lo largo del eje Oy (fig. 176). En este caso, si $y = F(x)$ es primitiva para $f(x)$, o sea $F'(x) = f(x)$, según el significado geométrico de la derivada la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente en cada punto con la abscisa x de la curva $y = F(x)$ es igual a $f(x)$. Todas las demás curvas tendrán en cada punto con la abscisa x las rectas tangentes que tienen el mismo coeficiente angular que la recta tangente de $f(x)$.

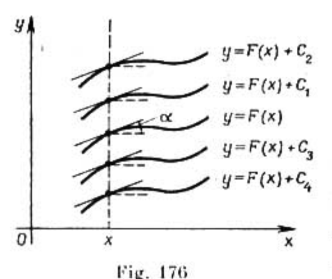


Fig. 176

○ **Ejemplo 2.** ¿Qué familia de curvas forman las primitivas $y = F(x) + C$ si el coeficiente angular de la tangente en cada punto con la abscisa x de la curva $y = F(x)$ es igual a $f(x) = x^2$?

Resolución. Tenemos $F'(x) = f(x) = x^2$. Conforme a la definición de la integral indefinida

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Por consiguiente, las curvas forman una familia de parábolas cúbicas $y = \frac{x^3}{3} + C$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la función primitiva. Cítese ejemplos.
2. ¿En qué consiste el significado de la operación de integración?
3. Explíquese por qué al integrar aparece una constante arbitraria.
4. Dése la definición de la integral indefinida.
5. ¿En qué consiste el significado geométrico de la integral indefinida?

§ 2. Propiedades fundamentales de la integral indefinida

De la definición de la integral indefinida se deducen inmediatamente sus propiedades siguientes.

1°. *La derivada de una integral indefinida es igual a la función subintegral; la diferencial de una integral definida es igual a la expresión subintegral, o sea,*

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□ Efectivamente, $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ y

$$d\int f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx. \quad ■$$

2°. *La integral indefinida de la diferencial de cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria, o sea,*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

□ En efecto, puesto que $dF(x) = F'(x)\,dx$, entonces

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \quad ■$$

3°. *El factor constante puede sacarse del signo integral, o sea, si* $k = \text{const} \neq 0$, *entonces*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

□ Efectivamente, sea $F(x)$ la primitiva para la función $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$. Entonces $kF(x)$ es la primitiva para la función $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. De la definición se desprende que

$$k\int f(x)\,dx = k[F(x)+C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)\,dx,$$

donde $C_1 = kC$. ■

4°. *La integral indefinida de una suma algebraica de dos funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de estas funciones tomadas por separado, o sea,*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

□ En efecto, sean $F(x)$ y $G(x)$ primitivas para las funciones $f(x)$ y $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Entonces, las funciones $F(x) \pm G(x)$ son primitivas para las funciones $f(x) \pm g(x)$. Por consiguiente,

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = [F(x)+C_1] \pm [G(x)+C_2] =$$
$$= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C =$$
$$= \int [f(x) \pm g(x)]\,dx. \quad ■$$

Note que esta propiedad es válida para todo número finito de funciones que se suman.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Nombre las propiedades fundamentales de la integral indefinida.
2. Demuéstrese la propiedad 4ª para la suma de tres funciones.

§ 3. Tabla de integrales principales

Aquí se da la tabla de integrales principales. Una parte de las fórmulas de esta tabla se deduce inmediatamente de la definición de la integración como operación inversa a la derivación (diferenciación) y de la tabla de derivadas. La validez de las demás fórmulas se puede comprobar fácilmente por la derivación.

I $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$,

II $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln |x| + C$,

III $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

IV $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$,

V $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(0 < a \neq 1$,

VI $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$,

VII $\int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$,

VIII $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$,

IX $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

X $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

XI $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$,

XII $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C$,

XIII $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$,

XIV $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$.

Las integrales contenidas en esta tabla suelen llamarse *integrales tabulares*.

Notemos algunos casos particulares de la fórmula I:

$$\int 1 \cdot \mathrm{d}x = x + C \ (\alpha = 0); \quad \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C \ (\alpha = 1);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \ \left(\alpha = -\frac{1}{2}\right).$$

En la fórmula II en vez de $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ para brevedad está escrito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}; \text{ en general, } \int \frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)} \text{ significa } \int \frac{1}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Citemos una fórmula evidente más: $\int 0 \cdot \mathrm{d}x = C$, o sea, *las primitivas de una función que es idénticamente igual a cero son constantes.*

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿De qué modo se hace la tabla de integrales principales?
2. Señálese las integrales tabulares que se han obtenido de la tabla de derivadas por la operación inversa a la derivación.

§ 4. Métodos fundamentales de integración

1. Integración inmediata. El cálculo de las integrales con ayuda de la tabla de integrales elementales y con ayuda de las propiedades fundamentales de las integrales indefinidas ha recibido el nombre de *integración inmediata.*

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int \left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx.$

Resolución. Aplicando las propiedades 3º y 4º, tenemos

$$\int \left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\int \cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Luego, utilizando, respectivamente, las fórmulas VIII, I, II, III de la tabla de integrales principales, encontramos

$$5\int \cos x\,dx=5(\operatorname{sen} x+C_1)=5\operatorname{sen} x+5C_1;$$
$$2\int dx=2(x+C_2)=2x+2C_2,$$
$$3\int x^2\,dx=3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_3\right)=x^3+3C_3;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_4;$$
$$4\int\frac{dx}{x^2+1}=4(\operatorname{arctg} x+C_5)=4\operatorname{arctg} x+4C_5.$$

De esta manera,

$$\int \left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=5\operatorname{sen} x+2x-x^3+\ln|x|-$$
$$-4\operatorname{arctg} x+(5C_1+2C_2+3C_3+C_4+4C_5).$$

Por lo general, todas las constantes arbitrarias se suman y el resultado se designa con una letra: $C=5C_1+2C_2+3C_3+C_4+4C_5$, por eso finalmente resulta

$$\int \left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\operatorname{sen} x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg} x+C.$$

La validez del resultado obtenido se comprueba fácilmente por la derivación (haga esto por sí mismo.)

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Resolución. La integral es tabular. Por esta razón se puede pasar a la integración inmediata. Con ayuda de la fórmula XIV, donde $a = 4$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsen \frac{x}{4} + C. \quad \bullet$$

En la práctica es un caso bastante raro cuando se logra calcular inmediatamente las integrales con ayuda de la tabla. Previamente se necesita transformar idénticamente la expresión subintegral de un modo tal que como resultado se obtengan integrales tabulares.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$.

Resolución. La integral no es tabular, por eso vamos a transformarla. Puesto que $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, la integral puede escribirse en la forma

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx.$$

Aplicando la propiedad 4ª, tenemos

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Hemos encontrado dos integrales tabulares. Según las fórmulas IX y X encontramos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Ejemplo 4. Calcular la integral $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Resolución. Puesto que $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, entonces

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx.$$

Mediante las fórmulas IX y I obtenemos

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Ejemplo 5. Calcular la integral $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx$.

Resolución. Puesto que $1+2x^2=(1+x^2)+x^2$, entonces

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx+$$
$$+\int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Según las fórmulas I y III obtenemos

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C. \quad \bullet$$

Así pues, vemos que para la integración no basta conocer solamente las fórmulas y saber emplearlas sino se necesita, además, la experiencia que se adquiere paulatinamente en el proceso de resolución de los problemas.

Ejercicios. Aplicando el método de integración inmediata, calcular las integrales siguientes:

1. $\int (x^2+3x^3+x+1)\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C.\right)$

2. $\int \left(x^4+\sqrt{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$. $\left(Resp.\ \frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}x^5\sqrt{x}+\right.$
$\left.+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\ln|x|+C.\right)$

3. $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$. $(Resp.\ 2\operatorname{arctg} x-3\arcsen x+C.)$

4. $\int (2^x+3^x)\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln x}+C.\right)$

5. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$. $\left(Resp.\ 2e^x+\frac{1}{2x^2}+C.\right)$

6. $\int (\operatorname{sen} x+5\cos x)\,dx$. $(Resp.\ -\cos x+5\operatorname{sen} x+C.)$

7. $\int \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. $(Resp.\ x-\cos x+C.)$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. $(Resp.\ -(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)+C.)$

9. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.\right)$

10. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$. $(Resp.\ 3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x+C.)$

11. $\int \frac{1-\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. $(Resp.\ \cos x-\operatorname{ctg} x+C.)$

12. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$. $(Resp.\ -(\operatorname{ctg} x+x)+C.)$

13. $\int \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2}(x-\operatorname{sen} x)+C.\right)$

14. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. (*Resp.* $\arcsin x -$
$-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$.)

15. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. (*Resp.* $x-\operatorname{arctg} x+C$.)

16. $\int \left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+\right.$
$\left.+\ln|x+\sqrt{x^2+5}|+C.\right)$

17. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right) dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\right.$
$\left.\times \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.\right)$

18. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\right)$

2. Método de sustitución. En muchos casos la introducción de una nueva variable de integración permite reducir la determinación de una integral dada a la determinación de la integral tabular, o sea, pasar a la integración inmediata. Tal método se llama *método de sustitución* o *método de cambio de una variable*. Se basa en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *Supongamos que una función $x=\varphi(t)$ está definida y derivable en cierto intervalo T y sea X el conjunto de los valores de esta función en el cual está definida una función $f(x)$, o sea, en T está definida la función compuesta $f[\varphi(t)]$. Entonces si sobre el conjunto X la función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$, es válida la fórmula*

$$\int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

☐ **Demostración.** Puesto que la primitiva $F(x)$ está definida sobre el mismo conjunto que la función $f(x)$ y existe la función compuesta $f[\varphi(t)]$, existe también la función compuesta $F[\varphi(t)]$. Entonces, conforme a la regla de derivación de una función compuesta, teniendo en cuenta que $F'(x)=f(x)$, obtenemos

$$(F[\varphi(t)])'=(F[\varphi(t)])'_x\,\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

o sea, la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ tiene sobre el conjunto T la primitiva $F[\varphi(t)]$ y, por consiguiente,

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C.$$

Notando que $F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)}$, finalmente tenemos

$$\int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

o sea, la fórmula buscada (1). ■

La fórmula (1) se denomina *fórmula de cambio de la variable en la integral indefinida.*

De la fórmula (1) se deduce que para calcular la integral $\int f(x)\,dx$ con ayuda de la sustitución $x = \varphi(t)$ es necesario en la función $f(x)$ reemplazar x por $\varphi(t)$ y poner $dx = \varphi'(t)\,dt$. En este caso obtenemos la función buscada expresada por la variable t. Para retornar a la variable x hace falta reemplazar t por el valor $t = \psi(x)$ que se obtiene de la relación $x = \varphi(t)$.

Si la función $x = \varphi(t)$ tiene la función inversa $t = \psi(x)$, de (1) se deduce la fórmula

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt|_{t=\psi(x)},$$

o sea, la fórmula (1) puede emplearse también en el orden inverso, o sea, de derecha a izquierda. Para esto, en adición a las hipótesis del teorema basta exigir que la función $x = \varphi(t)$ sea estrictamente monótona.

○ **Ejemplo 6.** Calcular la integral $\int \cos 3x\,dx$.

Resolución 6. La integral no es tabular aunque se parece a la integral $\int \cos x\,dx$. Por eso para calcularla es natural que se haga la sustitución, suponiendo $t = 3x$; entonces $dt = (3x)'\,dx = 3\,dx$, $dx = \frac{1}{3}\,dt$. Según la fórmula (1) obtenemos

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt,$$

es decir, una integral tabular. Aplicando la fórmula VIII de la tabla de integrales principales, encontramos

$$\frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t + C.$$

Retornando a la variable x, finalmente resulta

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C.$$

La integral dada puede ser calculada también inmediatamente, reemplazando $\mathrm{d}x$ por $\frac{1}{3}\mathrm{d}\,(3x)$, o sea, introduciendo bajo el signo de la diferencial el factor 3 y dividiendo por éste la integral. Como resultado obtenemos

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x\mathrm{d}\,(3x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + C.$$

Aquí se ha empleado la sustitución $t = 3x$. Este procedimiento económico y sencillo se utilizará reiteradamente en adelante. ●

La transformación idéntica de la expresión subintegral con la separación de la diferencial de una nueva variable de integración es un cambio más simple de la variable. De este modo se establece también la fórmula general

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(x)\,\mathrm{d}\,(ax).$$

○ **Ejemplo 7.** Calcular la integral $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resolución. Calculemos la integral dada inmediatamente, separando la diferencial de una nueva variable de integración. Tenemos

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1/2\,\mathrm{d}\,(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-1/2\,\mathrm{d}\,(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,(1-x^2) =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\,(1-x^2)^{1/2} + C = -(1-x^2)^{1/2} + C.$$

La integral dada se calcula con ayuda de la sustitución $t = 1 - x^2$. (Cumple esto por sí mismo.) ●

Existe un otro procedimiento no complicado, pero muy eficaz que permite simplificar el cálculo de integrales. Si el numerador de la función subintegral $f(x)$ es igual a la derivada del denominador, es válida la fórmula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C. \tag{2}$$

Efectivamente, utilizando la sustitución $t = f(x)$ y $\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$, tenemos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

○ **Ejemplo 8.** Calcular la integral $\int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Puesto que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, la integral puede escribirse en la forma

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx.$$

Notando que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, mediante la fórmula (2) obtenemos

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

La integral dada puede calcularse también con ayuda de la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, e inmediatamente, separando la diferencial de una nueva variable. (Cumple esto por sí mismo.)

Ejemplo 9. Calcular la integral $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx$.

Resolución. Suponemos $t = e^x$, $x = \ln t$. De aquí $dx = (\ln t)' \, dt = \frac{dt}{t}$. Por consiguiente,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{t - 1}{t + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)\, t} \, dt =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{d\,(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2 \ln (1 + t) - \ln t + C.$$

Retornando a la variable x, finalmente obtenemos

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx = 2 \ln (1 + e^x) - x + C.$$

Ejemplo 10. Calcular la integral $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \, dx$.

Resolución. Pongamos $x - 1 = t$, por lo tanto, $x = t + 1$. De aquí $dx = (t + 1)' \, dt = dt$; entonces

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \, dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} \, dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t| - \frac{1}{t} + C.$$

Retornando a la variable x, finalmente resulta

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \, dx = \frac{1}{2} (x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Ejemplo 11. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3}.$$

Pongamos $t=\sqrt[6]{x}$; entonces $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$. Encontramos

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3}=6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}.$$

Separando por la división la parte entera de la fracción, obtenemos

$$6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int\left[(t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Finalmente tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C. \quad ●$$

Y, en general, si la expresión subintegral no contiene otras raíces, salvo la raíz $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, donde a, b, c y d son ciertos números $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$; m, el número natural, conviene emplear la sustitución $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

○ **Ejemplo 12.** Calcular la integral $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$.

Resolución. Hecha la sustitución $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, resulta $t^2=\frac{1+x}{1-x}$, $1-x=\frac{2}{t^2+1}$, $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Luego tenemos

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$
$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Ejemplo 13. Calcular la integral $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

Resolución. Pongamos $t=\sqrt{4x+1}$; entonces $t^2=4x+1$, $x=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$, $dx=\frac{1}{2}t\,dt$. Encontramos

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx=\int \frac{\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}+5}{t}\cdot\frac{1}{2}t\,dt=\int\left(\frac{3}{8}t^2+\frac{17}{8}\right)dt=$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{17}{8} t + C = \frac{1}{8} \sqrt{4x+1}\,(4x+18) + C =$$

$$= \frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{4x+1} + C. \quad \bullet$$

Es necesario observar que una elección acertada de la sustitución representa de ordinario algunas dificultades. Para superarlas felizmente es necesario dominar bien la técnica de derivación y conocer bien las integrales tabulares.

○ **Ejemplo 14.** Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Resolución. Pongamos $\sqrt{x^2+a} + x = t$, de donde $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) \times$ $\times\, dx = dt$; así pues,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}\,dt,$$

de suerte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{x^2+a}+x| + C\text{ [1]}.$$

Ejemplo 15. Calcular la integral $\int \operatorname{sen}^n x \cos x\,dx$.

Resolución. Pongamos $t = \operatorname{sen} x$, de donde $dt = \cos x\,dx$. Entonces

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\,dx = \int t^n\,dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C & \text{para } n \neq -1, \\ \ln|t| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

Ejemplo 16. Calcular la integral $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$.

Resolución. Pongamos $x^2+1 = t$, $2x\,dx = dt$, por lo tanto,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

Para $n = 1$ obtenemos análogamente

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \quad \bullet$$

---

[1]) Aquí está calculada la integral tabular XII.

Notemos que en los ejemplos 15 y 16 las integrales pueden calcularse inmediatamente por medio de la separación de la diferencial de una nueva variable. Cerciórese de esto.

Ejercicios. Aplicando el método de cambio de la variable, calcular las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}(3x+5)\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C.\right)$

2. $\int e^{2x}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{2}e^{2x}+C.\right)$

3. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. $(\textit{Resp.}\ -\ln|\cos x|+C.)$

4. $\int e^{-x^2}x\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.\right)$

5. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+\ln|e^x-1|+C.\right)$

6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C.\right)$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+C.\right)$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ 6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt{x}+\right.\right.$
$\left.\left.+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.\right)$

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$. $(\textit{Resp.}\ x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C.$

10. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ $(t=1+\ln x)$. $(\textit{Resp.}\ \ln|1+\ln x|+C.)$

11. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$. $(\textit{Resp.}\ -e^{\cos x}+C.)$

12. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C.\right)$

13. $\int x(5x-7)^{50}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{25}\left[\frac{1}{52}(5x-7)^{52}+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{7}{51}(5x-7)^{51}\right]+C.\right)$

14. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. $(\textit{Resp.}\ x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C.)$

15. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+C.\right)$

16. $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}\,dx$ $(t=x^3-8)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}+C.\right)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ $(t=\sqrt{e^x+1})$. $\left(\textit{Resp.}\ \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.\right)$

18. $\int \frac{3^{1/x}\,dx}{x^2}$ $\left(t = \frac{1}{x}\right)$. $\left(Resp.\ -\frac{3^{1/x}}{\ln 3} + C.\right)$

19. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$ $(t = \operatorname{arctg} x)$. $\left(Resp.\ \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C.\right)$

20. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$. $\left(Resp.\ \operatorname{arcsen}\frac{e^x}{2} + C.\right)$

21. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. $(Resp.\ 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C.)$

22. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{4\arccos^4 x} + C.\right)$

En el proceso de integración es necesario, en ocasiones, aplicar varias veces el método de cambio de la variable.

○ **Ejemplo 17.** Calcular la integral $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$.

Resolución. Pongamos $x = a\operatorname{sen} t$ $(-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. La función $x = a\operatorname{sen} t$ es monótona y tiene la derivada continua x'_t. En este caso, cuando t varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$, la variable x varía de $-a$ a a. Luego tenemos $dx = a\cos t\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\; a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt.$$

Otra vez hemos obtenido una integral que no es tabular. Transformémosla. Puesto que $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, entonces

$$a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt.$$

La primera de las dos últimas integrales es tabular y se calcula inmediatamente:

$$\frac{a^2}{2}\int dt = \frac{a^2}{2}t + C_1.$$

Para calcular la segunda integral hagamos la sustitución $u = 2t$. Entonces $du = 2\,dt$, $dt = \frac{du}{2}$ y

$$\frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{a^2}{4}\int \cos u\,du = \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} u + C_2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2t + C_2.$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right] + C,$$

donde $C = C_1 + C_2$. Para retornar a la variable x, de la igualdad $x = a \operatorname{sen} t$ obtenemos

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Sustituyendo, finalmente resulta

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad \bullet$$

3. Método de integración por partes. El método de integración por partes está fundado en el uso de la fórmula de derivación del producto de dos funciones.

Teorema 6.3. *Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ están definidas y son derivables en cierto intervalo X y supongamos que la función $u'(x)\, v(x)$ tiene una primitiva sobre este intervalo, o sea, existe $\int v(x)\, u'(x)\, dx$. Entonces sobre el intervalo X la función $u(x)\, v'(x)$ también tiene una primitiva y es válida la fórmula*

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{2}$$

□ **Demostración.** De la igualdad

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

se deduce

$$u(x)\, v'(x) = [u(x)\, v(x)]' - u'(x)\, v(x).$$

La primitiva de la función $[u(x)\, v(x)]'$ en el intervalo X es la función $u(x)v(x)$. La función $u'(x)\, v(x)$ tiene una primitiva en X según la hipótesis del teorema. Por consiguiente, también la función $u(x)\, v'(x)$ tiene una primitiva en el intervalo X (como diferencia de las funciones derivables). Integrando la última igualdad, obtenemos la fórmula (2). ■

La fórmula (2) se llama *fórmula de integración por partes en una integral indefinida.*

Puesto que $v'(x)\, dx = dv$, $u'(x)\, dx = du$, se puede escribirla en la forma

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{3}$$

Esta fórmula permite reducir el cálculo de $\int u\, dv$ al cálculo de la integral $\int v\, du$ la cual puede resultar más sencilla para la integración.

○ **Ejemplo 18.** Calcular la integral $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Resolución. Pongamos $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Entonces

$$du = (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{dx}{1+x^2}; \quad \int dv = \int dx, \quad v = x$$

(aquí en calidad de v se puede tomar cada una de las primitivas que tienen la forma $x + C$, donde C es la constante arbitraria. Hemos tomado $v = x$, o sea, $C = 0$). Según la fórmula (3) tenemos

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \, \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \, \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du}{}^{1)} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}.$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

finalmente resulta

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad \bullet$$

Ha de notar que el método de integración por partes representa ciertas dificultades para los principiantes. En la fórmula (3) no se puede elegir u y dv arbitrariamente, de lo contrario se puede obtener una integral más complicada que la inicial.

○ **Ejemplo 19.** Calcular la integral $\int x e^x dx$.

Resolución. A distinción del ejemplo precedente aquí la situación es por completo no clara. Se puede poner $u = e^x$, $dv = x \, dx$, o $u = x$, $dv = e^x dx$, o, por último, $u = xe^x$, $dv = dx$. Pongamos, por ejemplo, $u = e^x$, $dv = x \, dx$. Entonces

$$du = (e^x)' \, dx = e^x \, dx; \quad \int dv = \int x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2.$$

Con ayuda de la fórmula (3) obtenemos

$$\int x e^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx.$$

Vemos que hemos llegado a una integral más complicada. Así pues, en el caso dado la elección de u y dv es desafortunada. Lo mismo se obtendrá si se pone $u = xe^x$, $dv = dx$. (Convéncese de esto por sí mismo.) Nos queda considerar el último caso.

---

[1]) La integral dada puede ser calculada por la sustitución $t = 1 + x^2$ (haga esto por sí mismo) o inmediatamente, separando la integral de una nueva variable al reemplazar $x \, dx$ por $\frac{1}{2} d(x^2 + 1)$ lo que precisamente hemos hecho.

Suponiendo $u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$, encontramos

$$\mathrm{d}u = (x')\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}x; \quad \int \mathrm{d}v = \int \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x, \quad v = \mathrm{e}^x.$$

Según la fórmula (3) obtenemos

$$\int x\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

La integral inicial queda calculada. Por lo tanto, en el caso dado u y $\mathrm{d}v$ se han escogido justamente. ●

Con frecuencia el método de integración por partes ha de aplicarse reiteradas veces.

○ **Ejemplo 20.** Calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}v = \cos x\, \mathrm{d}x$ [1]. Entonces

$$\mathrm{d}u = (\mathrm{e}^x)'\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x; \quad \int \mathrm{d}v = \int \cos x\, \mathrm{d}x, \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Mediante la fórmula (3) tenemos

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Calculamos repetidamente la integral obtenida, integrando por partes al poner $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$, de donde hallamos $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x$, $v = -\cos x$. Entonces

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x.$$

Sustituyendo el valor de la integral obtenida en la expresión (4), encontramos

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \left(-\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x.$$

Transponiendo la integral del segundo miembro de la igualdad al primer miembro, obtenemos

$$2 \int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C_1$$

y finalmente resulta

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + C,$$

donde $C = \frac{C_1}{2}$. (Puesto que C es la constante arbitraria, $C_1/2$ también es una constante arbitraria.) ●

---

[1]) Aquí se puede poner también $u = \cos x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

La práctica muestra que la mayor parte de las integrales que se calculan, integrando por partes puede ser dividida en tres grupos:

1) *En el primer grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx,\quad \int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx,\quad \int P(x)\ln x\,dx,$$

$$\int P(x)\operatorname{arcsen} x\,dx,\quad \int P(x)\arccos x\,dx,$$

donde $P(x)$ es el polinomio. Para calcularlas conviene poner u igual a una de las funciones indicadas anteriormente y $dv = P(x)\,dx$ (véase el ejemplo 18).

2) *En el segundo grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int P(x)\,e^{kx}\,dx,\quad \int P(x)\operatorname{sen} kx\,dx,\quad \int P(x)\cos kx\,dx,$$

donde $P(x)$ es el polinomio y k, cierto número. Para calcularlas conviene poner $u = P(x)$ y $dv = e^{kx}\,dx$, $dv = \operatorname{sen} kx\,dx$, $dv = \cos kx \times \times dx$, respectivamente (véase el ejemplo 19).

3) *En el tercer grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx,$$

donde a y b son ciertos números. Estas integrales se calculan integrando por partes dos veces (véase el ejemplo 20).

Desde luego, los tres grupos indicados no agotan las integrales que van calculadas con ayuda del método de integración por partes.

○ **Ejemplo 21.** Calcular la integral $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Resolución. Esta integral no forma parte de alguno de los tres grupos mencionados. Sin embargo, suponiendo $u = x$, $dv = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, encontramos $du = dx$, $v = -\operatorname{ctg} x$. Con ayuda de la fórmula (3) obtenemos

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\operatorname{sen} x| + C.$$

Análogamente se calcula la integral $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. ●

Ejercicios. Con ayuda del método de integración **por** partes calcular las siguientes integrales:

1. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.\right)$
2. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$. (*Resp.* $x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$.)

3. $\int \ln x\, dx$. (*Resp.* $x \ln x - x + C$.)

4. $\int x \ln x\, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\right)$

5. $\int x \cos^2 x\, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.\right)$

6. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$. (*Resp.* $-x \cos x + \operatorname{sen} x + C$.)

7. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$. (*Resp.* $-x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C$).

8. $\int x^2 e^x\, dx$. (*Resp.* $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$.)

9. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x + 2 \cos 3x)}{13} + C.\right)$

10. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x\, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \right.\right.$ $\left.\left. + \frac{3x^2}{2} - 7x\right) + C.\right)$

11. $\int (x^3 + 1) \cos x\, dx$. (*Resp.* $(x^3 - 6x + 1) \operatorname{sen} x + (3x^2 - 6) \times$ $\times \cos x + C$.)

12. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ x \ln(\sqrt{1-x} + \right.$ $\left. + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arcsin x + C.\right)$

Integrando, con frecuencia se necesita emplear primero el método de cambio de la variable y luego el de integración por partes.

○ **Ejemplo 22.** Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2 \ln x]}{x^4}\, dx.$$

Resolución. Esta integral no forma parte de alguno de los tres grupos de integrales que se calculan integrando por partes. Transformémosla con ayuda del método de cambio de la variable. Pongamos $t = 1 + \frac{1}{x^2}$. Entonces $dt = -\frac{2\,dx}{x^3}$, de donde $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} dt$. Después de hacer transformaciones poco complicadas y la sustitución obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2 \ln x]}{x^4}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, \ln \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t}\, \ln t\, dt.$$

Vemos que hemos llegado a la integral que se calcula fácilmente, integrando por partes. Suponiendo $u = \ln t$, $dv = \sqrt{t}\, dt$, encon-

ramos $du = \frac{dt}{t}$, $v = \frac{2}{3} t \sqrt{t}$. Por consiguiente,

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\ln t\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\ln t - \frac{2}{3}\int \sqrt{t}\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\ln t - \frac{4}{9} t\sqrt{t}\right] + C.$$

Por último, retornando a la variable x, finalmente obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]}{x^4}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right] + C = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2 - 3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] + C. \bullet$$

Ejercicio. Calcular la integral $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (poner $t = \sqrt{x}$). (*Resp.* $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$.)

Calculemos la integral $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ con ayuda de la integración por partes (anteriormente (véase el ejemplo 17 del subp. 2) esta integral ha sido calculada con ayuda del método de cambio de la variable).

Pongamos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$; entonces $du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Por lo tanto,

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (5)$$

Agreguemos y sustrayamos a^2 en el numerador de la función subintegral en el segundo miembro de la igualdad. Entonces, dividiendo por $\sqrt{a^2 - x^2}$, obtenemos

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} - I.$$

Sustituyendo esta expresión en (5), resulta

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} - \;.$$

Uniendo ambas integrales $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ en el primer miembro, tenemos

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}.$$

De aquí finalmente encontramos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}+C.$$

En conclusión calculemos la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

(n es un número entero positivo) la cual necesitaremos en el siguiente párrafo. Para $n = 1$ tenemos

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$$

Sea $n > 1$. Reemplazando en el numerador la unidad por la diferencia $(x^2+1)-x^2$, obtenemos

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}.$$

En la segunda integral pongamos

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}, \quad v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$$

(véase el ejemplo 16 del subp. 2), por eso

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

por consiguiente,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

o sea,

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \quad (n > 1). \qquad (6)$$

Las fórmulas del tipo (6) se llaman *recurrentes*. Permiten reducir el cálculo de la integral I_n al de la integral I_{n-1} con índice menor en unidad y, a su vez, el cálculo de I_{n-1} al de I_{n-2}, etc. Como resultado llegaremos a la integral conocida I_1 y quedará calculada la integral I_n.

○ **Ejemplo 23.** Calcular $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Resolución. Según la fórmula recurrente (6) encontramos

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x;$$

finalmente resulta

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C. \quad \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el método de integración inmediata?
2. Escríbase la fórmula de cambio de una variable en la integral indefinida. ¿Para qué condiciones esta fórmula es válida?
3. Escríbase la fórmula de integración por partes. ¿Para qué condiciones esta fórmula es válida?
4. ¿Qué integrales se calculan lo más cómodamente mediante la integración por partes?
5. ¿Para qué sirven las fórmulas recurrentes?

§ 5. Integración de las funciones racionales

Una clase importante de funciones cuyas integrales se expresan siempre por funciones elementales es formada por las funciones racionales, o sea, por las funciones que pueden representarse en forma de la fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado del polinomio en el nominador es igual al grado del polinomio en el denominador o mayor que el último grado, entonces, al cumplir la división, obtenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad (1)$$

donde $W(x)$ es cierto polinomio y $R(x)$, un polinomio cuyo grado es menor que el de $Q(x)$.

○ **Ejemplos.**

1. $\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1} = x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}.$
2. $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x+\frac{1}{x^2+1}.$ ●

En el álgebra superior se demuestra que cada polinomio $Q(x)$ puede representarse en la forma del producto

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

donde A es el coeficiente del polinomio $Q(x)$ de grado mayor, α, β, ..., γ son las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$. Los factores $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma)$ se llaman *factores elementales*. Si entre

ellos hay tales que coincidan, obtenemos la representación

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \dots (x-\gamma)^t, \tag{2}$$

donde r, s, ..., t son números enteros que se denominan *multiplicidades* correspondientes a las raíces α, β, ..., γ, con la particularidad de que $r+s+\dots+t=n$; aquí n designa el grado del polinomio $Q(x)$.

Así, por ejemplo, el polinomio $Q(x) = 5(x-1)^2(x+4)^3$ tiene las siguientes raíces: $\alpha = 1$, $\beta = -4$. En este caso el número 2 es multiplicidad de la raíz 1 y el número 3, multiplicidad de la raíz (-4).

Entre las raíces de la representación (2) pueden haber también complejas. En el álgebra superior se demuestra que si $\alpha = a + bi - r$ es una raíz compleja múltipla del polinomio con coeficientes reales, este último tiene también una r-múltipla raíz $\bar{\alpha} = a - bi$ conjugada con la raíz antes mencionada. Con otras palabras, si de la representación (2) forma parte el factor $(x-\alpha)^r$, ella contiene también el factor $(x-\bar{\alpha})^r$. Multiplicando estos dos factores, obtenemos

$$(x-\alpha)^r (x-\bar{\alpha})^r = \{[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\}^r =$$
$$= [x^2 - x(a+bi) - x(a-bi) + a^2 + b^2]^r =$$
$$= [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^r = (x^2 + 2px + q)^r,$$

donde $p = -a$, $q = a^2 + b^2$, $p^2 - q < 0$.

Así pues, el producto de los correspondientes factores a las raíces complejas conjugadas puede representarse en la forma de un trinomio de segundo grado de coeficientes reales. Procediendo de un modo análogo con las demás raíces complejas, escribamos la representación (2) en la forma

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \dots (x^2+2px+q)^t (x^2+2ux+v)^n \dots \tag{3}$$

En el álgebra superior se demuestra el siguiente teorema: *si una función racional* $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *en la relación* (1) *tiene en el numerador un grado del polinomio menor que el grado del polinomio en el denominador y el polinomio* $Q(x)$ *está representado en la forma* (3), *esta función puede ser representada únicamente en la forma*

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2} + \dots + \frac{M_1x+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \dots, \tag{4}$$

donde A_1, A_2, ..., A_r, ..., M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_t, N_t, ... son ciertos números. El desarrollo (4) se llama *desarrollo de una función racional en fracciones elementales.*

La igualdad (4) tiene lugar para todos los valores de x que no sean raíces reales del polinomio $Q(x)$.

Para determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$, multipliquemos ambos miembros del desarrollo (4) por $Q(x)$. Puesto que la igualdad entre el polinomio $R(x)$ y el que se obtendrá en el segundo miembro es válida para todos los valores de x, los coeficientes de los grados iguales de x son iguales entre sí. De este modo obtendremos varias ecuaciones de primer grado de las cuales determinaremos los números desconocidos $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$. El método expuesto de determinación del desarrollo de una función racional se llama *método de coeficientes indeterminados.*

○ **Ejemplo 1.** Desarrollar la función racional $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ en fracciones elementales.

Resolución. Puesto que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, según la fórmula (4) tenemos

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por x^2-5x+6, resulta

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3), \text{ o bien}$$
$$2x-1=(A+B)x-2A-3B.$$

Igualando los coeficientes de los grados iguales de x, obtenemos las ecuaciones de primer grado: $\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$ de donde $A=5$, $B=-3$.

Así pues,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

Ejemplo 2. Hallar el desarrollo de la función racional $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ en fracciones elementales.

Resolución. Puesto que el trinomio de segundo grado x^2+1 tiene raíces complejas, según la fórmula (4) tenemos

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $x(x^2+1)^2$, obtenemos

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x$$

o bien

$$x^2 - 1 = (A + B)\,x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)\,x^2 + \\ + (C + E)\,x + A.$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, x^3 y x^4, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^4 : A + B = 0, \\ x^3 : C = 0, \\ x^2 : 2A + B + D = 1, \\ x^1 : C + E = 0, \\ x^0 : A = -1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = 0$, por eso el desarrollo buscado tiene la forma

$$\frac{x^2-1}{x\,(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}. \quad \bullet$$

De lo expuesto se deduce que el problema de integración de la función racional (1) se reduce a la integración de la función racional $w(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ cuya integral es tabular

$$\int w(x)\,\mathrm{d}x = a_0\frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1\frac{x^m}{m} + \ldots + a_mx + C$$

y a la integración de la función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$ lo que, a su vez, se reduce a la determinación de las integrales de los cuatro siguientes tipos:

I. $\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-\alpha| + C$.

II. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C$ $(r > 1)$ [1].

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,\mathrm{d}x$.

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,\mathrm{d}x$ $(r > 1)$.

En este caso el polinomio $x^2 + 2px + q$ no tiene raíces reales, ya que $p^2 - q < 0$.

Calculemos la integral de tipo III que figura entre las que se encuentran con frecuencia en la práctica.

Separemos del trinomio en el denominador el cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2px + q = (x + p)^2 + q - p^2.$$

---

[1]) Las integrales de tipo I y II se calculan, integrando con ayuda de la sustitución $t = x - \alpha$.

Este desarrollo sugiere la sustitución $x+p=t$, $x=t-p$, $dx=dt$. Luego, $q-p^2=h>0$ y pasemos a la variable t. Como resultado la integral se transforma reduciéndose a la forma

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}A\int \frac{2t\,dt}{t^2+h} + (B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

En el segundo miembro la primera integral se calcula inmediatamente

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2+h} = \ln|t^2+h| + C = \ln|x^2+2px+q| + C.$$

La segunda integral se calcula con ayuda de la fórmula XIII de la tabla de integrales principales.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$.

Resolución. Separemos en el denominador el cuadrado perfecto: $x^2+4x+9=(x+2)^2+5$. Hagamos la sustitución $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$; como resultado obtenemos

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}\,dx = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}\,dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5}\,dt =$$
$$= 3\int \frac{2t\,dt}{t^2+5} - 7\int \frac{dt}{t^2+5} = 3\ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C.$$

Retornando a la variable x, resulta

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx = 3\ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \quad ●$$

Ahora pasemos a calcular la integral de tipo IV $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx$, $q-p^2>0$, $r>1$. Introduzcamos una nueva variable:

$$z = \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}, \quad x = z\sqrt{q-p^2}-p, \quad dx = \sqrt{q-p^2}\,dz. \tag{5}$$

Luego tenemos

$$z^2+1 = \frac{(x+p)^2}{q-p^2} + 1 = \frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \tag{6}$$

De esta manera, utilizando la sustitución (5) y tomando en consideración (6), obtenemos

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx = \int \frac{A[z\sqrt{q-p^2}-p]+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r}\sqrt{q-p^2}\,dz =$$
$$= \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}\,dz = M\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r} + N\int \frac{dz}{(z^2+1)^r},$$

donde M y N son los números constantes cuyos valores están claros si se examina la penúltima igualdad. A la segunda integral de la última igualdad se le puede aplicar la fórmula recurrente (véase el § 4, subp. 3, fórmula (6)), poniendo en la primera de las integrales $z^2+1=t$, resulta

$$M\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}=\frac{M}{2}\int\frac{dt}{t^r}=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{t^{r-1}}+C=$$
$$=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}+C.$$

○ **Ejemplo 4.** Calcular la integral $\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$.

Resolución. Pongamos $z=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\frac{x-1}{2}$, de donde $x=1+2z$, $dx=2\,dz$ y $x^2-2x+5=4(z^2+1)$, por consiguiente,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\int\frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}2\,dz=$$
$$=\int\frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}\,dz=\frac{5}{4}\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Pero

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1},$$
$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=\frac{4z-5}{8(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C.$$

Retornando ahora a la variable x, obtenemos

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C. \quad \bullet$$

Así pues queda determinado que la integración de toda función racional se reduce a la integración del polinomio y de un número finito de fracciones elementales cuyas integrales se expresan por funciones racionales, logaritmos y arcos tangentes. Con otras palabras, toda función racional se integra en funciones elementales.

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$. (*Resp.* $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$.)

2. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$. (*Resp.* $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.)

3. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}\,dx$. (*Resp.* $3\ln|x|+\ln|x-1|-$
$-\ln|x+1|+C$.)

4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\right.$
$\left.+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.\right)$

$\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\times\right.$
$\left.\times\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.\right)$

6. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\right.$
$\left.+C.\right)$

7. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.\right)$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\right.$
$\left.+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\right)$

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.\right)$

10. $\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\right.$
$\left.+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.\right)$

11. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.\right)$

En conclusión note que los métodos de integración considerados no agotan todas las clases de las funciones elementales integrables de modo analítico. Al mismo tiempo de lo expuesto se desprende que técnicamente la integración es más complicada que la derivación. Se necesitan ciertos hábitos e inventiva que no se adquieren sino por la práctica de resolución de un gran número de problemas. Además, si la derivación no nos lleva fuera de la clase de las funciones elementales, al integrar existen tales funciones elementales (por ejemplo e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, etc.) cuyas primitivas no son funciones elementales.

Tales primitivas están bien estudiadas, sus valores están calculados aproximadamente, para ellas están hechas tablas y gráficas.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Cómo una función racional se desarrolla en fracciones elementales?
2. ¿Qué es el método de coeficientes indeterminados?
3. ¿A las integrales de qué tipos conduce la integración de una función racional?
4. Cítese un ejemplo de las funciones elementales cuyas primitivas no son funciones elementales.

§ 6. Integral definida

1. Definición de la integral definida. Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, $a < b$. Dividamos este segmento en n partes arbitrarias por los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$
$$\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots$$
$$\ldots < x_n = b.$$

Fig. 177

Designemos esta partición con τ y llamaremos *puntos de partición* los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En cada uno de los segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$ escojamos un punto arbitrario ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. Con Δx_i designemos la diferencia $x_i - x_{i-1}$ que llamaremos *longitud* del segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$.

Planteemos la suma

$$\sigma = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (1)$$

que denominaremos *suma integral* para la función $f(x)$ sobre $[a, b]$, correspondiente a la partición dada de $[a, b]$ en segmentos parciales y a la opción dada de los puntos arbitrarios ξ_i. El significado geométrico de la suma σ es evidente: es una suma de las áreas de los rectángulos que tienen por bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ y por alturas $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ si $f(x) \geqslant 0$ (fig. 177).

Designemos con λ la longitud del mayor segmento parcial de partición τ: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\}$.

Definición. *Si existe el límite finito I de la suma integral* (1) *para $\lambda \to 0$, este límite se llama integral definida* [1] *de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa del modo siguiente:*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \text{ [2]} \tag{2}$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

En este caso la función $f(x)$ llámase *integrable en* $[a, b]$. Los números a y b se denominan *límites de integración inferior* y *superior*, respectivamente; $f(x)$ se llama *función subintegral* y x, *variable de integración*.

Es necesario hacer varias aclaraciones, ya que tiene lugar un paso límite no del todo ordinario. La definición dada de la integral definida se parece, por su forma, a la primera definición del límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones, donde en vez de la función está la suma integral (1) la cual es una variable que depende de λ. Efectivamente, supongamos que el segmento $[a, b]$ se divide sucesivamente en partes primero por un procedimiento, luego por segundo, por tercero, etc. Entonces la longitud del segmento mayor en cada caso disminuye $\lambda \to 0$[3]) cuando $n \to \infty$. Así pues, obtenemos una sucesión de particiones $\{\tau_n\}$ en la cual $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ y se puede dar la definición de la integral definida «en el lenguaje de las sucesiones» ya conocido: *la función $f(x)$ se llama integrable en $[a, b]$ si para toda sucesión de particiones $\{\tau_n\}$ en la cual $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ la sucesión correspondiente de las sumas integrales $\{\sigma_n\}$ tiende siempre hacia un mismo límite $I = \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n$.*

Se puede dar la definición de la integral definida también «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»: *el número I se denomina integral definida de la función $f(x)$ en un segmento $[a, b]$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda < \delta$ (o sea, el segmento está partido en partes cuya longitud $\Delta x_i < \delta$) independientemente de la opción de los puntos ξ_i se cumpla*

---

[1]) En algunos manuales, donde la integral indefinida como conjunto de las funciones de la forma $F(x) + C$ se llama «primitiva» la integral definida se denomina sencillamente «integral».

[2]) Se lee: «la integral definida de $f(x)$ entre a y b respecto a dx».

[3]) En vez de $\lambda \to 0$ sería incorrecto escribir $n \to \infty$, ya que se puede citar un ejemplo (piense ¿qué ejemplo?) cuando el aumento de los puntos de partición de $[a, b]$ no significa obligatoriamente que todos los valores Δx_i decrecen indefinidamente; en cambio, si $\lambda \to 0$, todos los valores $\Delta x_i \to 0$ y obligatoriamente $n \to \infty$.

la desigualdad

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

Se puede demostrar la equivalencia de ambas definiciones por analogía con la de dos definiciones del límite de una función. La definición dada «en el lenguaje de las sucesiones» ofrece la posibilidad de extender los conceptos fundamentales de la teoría de los límites a este nuevo tipo del límite.

De la definición de la integral definida se desprende que la magnitud de la integral (2) depende únicamente del tipo de las funciones $f(x)$, y de los números a y b. Por consiguiente, si se prefijan $f(x)$ y los límites de integración la integral (2) se define unívocamente y es cierto número.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición, calcular la integral $\int_a^b C\,dx$, donde C es cierto número.

Resolución. Partamos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots \ldots < x_n = b$ y planteemos la suma integral correspondiente (1). Puesto que la función subintegral $f(x) = C$ es constante, para toda opción de los puntos intermedios ξ_i obtenemos la suma integral de la forma

$$\sigma = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \ldots + C\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i.$$

Luego tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= C\left[(x_i - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_n)\right] = C(b-a).$$

Vemos que la suma integral para la función dada no depende de la partición ni de la elección de los puntos ξ_i y es igual a $C(b-a)$. Por consiguiente, su límite para $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ es igual a la misma magnitud.

Así pues, por definición

$$\int_a^b C\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(b-a).$$

Ejemplo 2. Utilizando la definición, calcular la integral $\int_0^1 x\,dx$.

Resolución. Partamos el segmento [0, 1] en n partes iguales (en el caso dado esto es cómodo) por los puntos $0 = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1$. La longitud de cada segmento parcial $\Delta x_i = 1/n$. En este caso si $n \to \infty$, entonces $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} = \frac{1}{n} \to 0$ y al contrario. En calidad de puntos intermedios ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ tomemos los extremos derechos de los segmentos parciales: $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n$. Planteemos la suma integral correspondiente (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calculemos el límite de la suma integral para $n \to \infty$. Obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1/n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, según la definición,

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \frac{1}{2}. \; \bullet$$

Ejercicio. En el ejemplo 2, muéstrese que para otra opción de los puntos intermedios ξ_i $\left(\text{por ejemplo, } \xi_i = \frac{i-1}{n} \text{ son los extremos izquierdos de los segmentos parciales}\right)$ el límite de la suma integral y, por lo tanto, la magnitud de la integral dada no cambian.

2. Propiedades fundamentales de la integral definida. La integral $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ fue introducida para el caso $a < b$. Generalicemos el concepto de integral definida para el caso cuando $a = b$ y $a > b$.

1°. *Si* $a = b$, *entonces, por definición, suponemos*

$$\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

Si $a > b$, *entonces, también por definición*,

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

2°. *Cualesquiera que sean los números a, b y c, siempre tiene lugar la igualdad*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

(aquí y a continuación se supone que las integrales que forman parte de las fórmulas a demostrar existen).

☐ **Demostración.** Admitamos primero que $a < c < b$. Puesto que el límite de la suma integral σ no depende del método de partición del segmento $[a, b]$, llevaremos a cabo la partición de un modo tal que el punto c siempre sea un punto de partición de $[a, b]$. Si, por ejemplo, $c = x_m$, entonces σ se puede partir en dos sumas:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

En la última igualdad, pasando al límite para $\lambda \to 0$, obtendremos precisamente la igualdad (5).

La esencia de la propiedad demostrada consiste en que la integral definida sobre todo el segmento es igual a la suma de las integrales sobre las partes del mismo.

Para otra disposición de los puntos a, b y c la demostración se reduce fácilmente al caso considerado. Supongamos, por ejemplo, $a < b < c$; entonces, según lo demostrado, tenemos

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

de donde, teniendo en cuenta (2), obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

o sea, otra vez hemos llegado a la ecuación (5). ■

3°. *El factor constante puede sacarse fuera del signo de la integral definida, o sea,*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

☐ **Demostración.** Efectivamente, para toda partición del segmento $[a, b]$ y para toda opción de los puntos ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Pasando al límite para $\lambda \to 0$, tenemos

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= k \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = k \int_a^b f(x)\,dx,$$

o sea, queda obtenida la igualdad (6). ■

4°. *La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales, o sea,*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x\,dx).$$

□ **Demostración.** En efecto, para toda partición del segmento $[a, b]$ y toda opción de los puntos ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Puesto que

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \ \text{ y } \ \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,dx,$$

obtenemos que

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \ ■$$

Observación. La propiedad 4ª tiene lugar para todo número finito de sumandos.

3. Estimaciones de las integrales. Fórmula da valor medio.

1°. *Si por doquier sobre el segmento* $[a, b]$ *la función* $f(x) \geqslant 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

□ **Demostración.** En efecto, toda suma integral σ para la función $f(x)$ en $[a, b]$ no es negativa, ya que

$$f(\xi_i) \geqslant 0, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pasando al límite para $\lambda \to 0$ en la desigualdad $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \quad \blacksquare$$

2°. *Si por doquier en el segmento* $[a, b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{7}$$

□ **Demostración.** Aplicando la estimación 1ª a la función $g(x) - f(x) \geqslant 0$, tenemos

$$\int_b^a [g(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Pero, conforme a la propiedad 4ª,

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de donde obtenemos la desigualdad (7). ■

3°. *Para la función* $f(x)$ *definida en el segmento* $[a, b]$ *tiene lugar la desigualdad*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{8}$$

Demostración. Aplicando la estimación 2ª a las desigualdades evidentes

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

e integrándolas término a término, al tener en cuenta la propiedad 3ª, resulta

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

lo que es equivalente a la desigualdad (8). ■

Corolario. *Si por doquier en el segmento* $[a, b]$, $a < b$, $|f(x)| \leqslant k$, *entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant k(b - a). \tag{9}$$

□ Efectivamente, de la desigualdad $|f(x)| \leqslant k$ y de las estimaciones 2ª y 3ª se deduce que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\int_a^b \mathrm{d}x,$$

de aquí, tomando en consideración que

$$\int_a^b \mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a, \tag{10}$$

obtenemos la relación (9). ■

4°. *Si m y M son, respectivamente, los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$ en un segmento $[a, b]$, $a < b$, entonces*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a). \tag{11}$$

□ **Demostración.** Según la hipótesis para cada $x \in [a, b]$ tenemos

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Aplicando la estimación 2ª a estas desigualdades e integrándolas término a término, resulta

$$m\int_a^b \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x,$$

de donde, teniendo en cuenta (10), obtenemos las desigualdades (11). ■

Teorema 6.4. (del valor medio). *Si la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$, entonces en este segmento existe un punto c tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a). \tag{12}$$

La fórmula (12) *se llama fórmula del valor medio.*

□ **Demostración.** Puesto que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, conforme al segundo teorema de Weierstrass existen números m y M tales que

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f(x).$$

De aquí, según la estimación 4ª, encontramos

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

y, por consiguiente,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Pongamos

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu \quad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

Puesto que μ está comprendida entre los valores mínimo y máximo de la función continua $f(x)$ en $[a, b]$ (fig. 178), conforme al teorema 4.11 sobre el paso de una función por todo valor medio existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \mu$. Por eso

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c),$$

lo que es equivalente a la igualdad (12). ■

Fig. 178

La magnitud $f(c)$ en la fórmula (12) se llama *valor medio de la función* $f(x)$ *en el segmento* $[a, b]$.

Observación. El teorema del valor medio tiene un significado geométrico claro: la magnitud de la integral definida para $f(x) \geqslant 0$ es igual al área del rectángulo que tiene por altura $f(c)$ y por base $b - a$.

4. Condiciones de existencia de la integral definida.

Teorema 6.5 (condición necesaria de la integrabilidad de una función). *Si la función $f(x)$ es integrable en un segmento $[a, b]$, ella está acotada en este segmento.*

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que $f(x)$ no esté acotada en $[a, b]$. Mostremos que en este caso la suma integral σ puede, a costa de la opción de los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, hacerse tan grande como se quiera para toda partición del segmento $[a, b]$.

Efectivamente, puesto que $f(x)$ no está acotada en $[a, b]$, para toda partición del segmento $[a, b]$ ella posee esta propiedad aunque sea en un solo segmento parcial, digamos en Δx_1. Entonces escojamos en los demás segmentos $\Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ arbitrariamente los puntos $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ y designemos

$$\sigma' = f(\xi_2)\,\Delta x_2 + f(\xi_3)\,\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Luego tomemos ξ_1 en Δx_1 tal que

$$|f(\xi_1)| \geqslant \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1},$$

donde M es todo número dado que a ciencia cierta es positivo. Esto se puede hacer, puesto que $f(x)$ no está acotada sobre Δx_1. Entonces

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1 \geqslant |\sigma'| + M \text{ y } |\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \\ + \sigma'| \geqslant |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |\sigma'| \geqslant M$$

o sea, la suma integral σ es, en valor absoluto, mayor que todo número prefijado. Por esta razón la suma integral σ no tiene un límite finito y esto significa que la integral definida de una función no acotada no existe. ■

Observación. El teorema inverso no es justo, o sea, la condición de que la función $f(x)$ esté acotada es necesaria pero no suficiente para su integrabilidad. Aclaremos esta afirmación, citando un ejemplo. Consideremos la función de Dirichlet en el segmento $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

La función de Dirichlet está, evidentemente, acotada. Sin embargo, no es integrable en $[0, 1]$. Mostremos esto. Si para toda partición del segmento $[0, 1]$ se eligen los puntos ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ como racionales, resulta

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

y si se toman ξ_i como irracionales, se tiene

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Así pues, en caso de la partición en segmentos tan pequeños como se quiera la suma integral puede tomar tanto el valor igual a 0 como el valor igual a 1. Por eso para $\lambda \to 0$ la suma integral σ no tiene un límite.

Por lo tanto, es evidente que para la existencia de la integral definida de cierta función $f(x)$ esta última, además de estar acotada, debe poseer propiedades adicionales que aseguren su integrabilidad.

Teorema 6.6 (condición suficiente de integrabilidad de una función). *Si la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$, ella es integrable en éste, o sea, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda < \delta$ se cumpla la desigualdad*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, conforme al teorema de Cantor ella es también uniformemente continua en este segmento, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada dos puntos x' y $x'' \in [a, b]$ due satisfagan la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualqad

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (14)$$

Mostremos que esto es precisamente tal δ con que la desigualdad (13) se cumple para $\lambda < \delta$.

Sea τ la partición del segmento $[a, b]$ en segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$ cuya longitud $\Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$. Aplicando el teorema del valor medio a cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, resulta

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i^*)\,\Delta x_i, \quad x_{i-1} \leqslant \xi_i^* \leqslant x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sumando estas igualdades concernientes a todos los segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sigma^*,$$

donde $\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i$. Tomemos ahora en cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario ξ_i. Entonces

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,dx = \sigma - \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)]\,\Delta x_i.$$

Puesto que $|\xi_i - \xi_i^*| \leqslant \Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$, entonces, tomando en consideración la desigualdad (14), obtenemos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

o sea la desigualdad requerida (13). ■

Como se deduce del teorema, la condición de continuidad de la función en el segmento $[a, b]$ es la condición suficiente de su integrabilidad. Sin embargo, esto no significa que la integral definida existe

sólo para funciones continuas. La clase de funciones integrables es mucho más amplia. Por ejemplo, se puede demostrar que existe una integral definida de las funciones que tienen un número finito de los puntos de discontinuidad [1]).

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué es la partición del segmento $[a, b]$?
2. ¿Qué es la suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y en qué consiste el significado geométrico de esta suma?
3. Dese la definición de la integral definida como límite de la suma integral. ¿Por qué en vez de $\lambda \to 0$ no se puede escribir $n \to \infty$?
4. Enúnciense las propiedades fundamentales de la integral definida. Demuéstrese la propiedad 2ª para el caso en que los puntos se disponen del modo siguiente: $b < c < a$.
5. Nombre las estimaciones de las integrales.
6. Sea $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ¿Se deduce de aquí que $f(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$?
7. Enúnciese el teorema del valor medio.
8. ¿Por qué en la fórmula del valor medio (12) el punto c no puede considerarse arbitrario?
9. Cítese un ejemplo cuando la fórmula (12) es válida para todo punto $c \in [a, b]$.
10. Enúnciese la condición necesaria de integrabilidad de una función.
11. ¿Es integrable toda función acotada? Arguméntese la respuesta citando un ejemplo.
12. Enúnciese la condición suficiente de integrabilidad de una función.
13. Cítese el ejemplo de una función integrable.

§ 7. Integral definida con límite superior variable

Hasta ahora hemos considerado la integral definida con los límites de integración constantes a y b. Si varía, por ejemplo, el límite superior, sin salir del segmento $[a, b]$, la magnitud de la integral cambiará. Con otras palabras, la integral con el límite superior variable es la función de su límite superior.

Así pues, si tenemos la integral

$$\int_a^x f(t)\,dt,\,[2])\quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

con el límite inferior constante a y con el límite superior variable x, la magnitud de esta integral es función del límite superior x. Desig-

[1]) Véase el libro: *V. S. Shipachev*. Matemática superior. M., 1985, *en ruso*.
[2]) Para comodidad, aquí la variable de integración se designa con letra t, ya que con letra x está designado el límite superior de integración.

nemos esta función con $\Phi(x)$ (fig. 179), o sea, pongamos

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

y llamémosla *integral con el límite superior variable*. Geométricamente la función $\Phi(x)$ es el área rayada de un trapecio curvilíneo (fig. 179) si $f(x)>0$. En este caso la función $\Phi(x)$ es creciente, ya que con el crecimiento de x el área del trapecio curvilíneo aumenta.

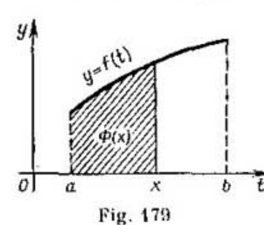


Fig. 179

Ahora consideremos el teorema fundamental de los cálculos diferencial e integral que establece la relación entre la derivada y la integral.

Teorema 6.7. *La derivada de la integral de una función continua respecto al límite superior variable existe y es igual al valor de la función subintegral en el punto igual al límite superior, o sea,*

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x). \tag{2}$$

□ **Demostración.** Tomemos todo valor $x\in[a, b]$ y le asignemos un incremento $\Delta x\neq 0$ tal que $x+\Delta x\in[a, b]$, o sea, $a\leqslant x+\Delta x\leqslant b$. Entonces la función $\Phi(x)$, definida por la expresión (1), obtendrá un nuevo valor

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Conforme a la propiedad 2ª de la integral definida (véase el subp. 2 del § 6) tenemos

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

De aquí encontramos el incremento de la función $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Aplicando el teorema 6.4, resulta

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\,\Delta x,$$

donde c es el número comprendido entre x y $x + \Delta x$. Dividamos ambos miembros de la igualdad por Δx:

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(c).$$

Si ahora $\Delta x \to 0$, entonces $c \to x$; en este caso, en virtud de la continuidad de la función $f(x)$ en $[a, b]$, $f(c) \to f(x)$. Por esta razón, pasando al límite en la última igualdad para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

o bien $\Phi'(x) = f(x)$. ■

Por lo tanto, queda determinado que toda función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$ tiene una primitiva en este segmento, con la particularidad de que la función $\Phi(x)$ (la integral con el límite superior variable) es primitiva para $f(x)$. Puesto que toda otra primitiva para la función $f(x)$ puede distinguirse de $\Phi(x)$ sólo en constante (véase el teorema 6.1), queda establecida la relación entre las integrales indefinida y definida:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

donde C es la constante arbitraria.

En particular, del teorema se deduce que $\Phi(x)$ es una función continua sobre el segmento $[a, b]$. (Explíquese ¿por qué?) El caso cuando la integral definida tiene el límite inferior variable y el límite superior constante se reduce fácilmente al examinado con ayuda de la propiedad 1ª (véase la fórmula (4), § 6).

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué función se llama integral con el límite superior variable? ¿En qué consiste su significado geométrico?

2. ¿A qué es igual la derivada de la integral respecto a su límite superior? Demuéstrese el teorema respectivo y explíquese por qué éste se considera fundamental en el cálculo diferencial e integral.

§ 8. Fórmula de Newton—Leibniz

El cálculo de las integrales definidas mediante el método fundado en la determinación de la integral como límite de la suma integral representa grandes dificultades. Por esta razón existe un otro método, prácticamente más cómodo, de calcular las integrales definidas, método basado en estrecha ligazón existente entre los conceptos de integrales indefinida y definida.

Teorema 6.8 (teorema fundamental del cálculo integral). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$. Entonces, si la función $F(x)$ es cierta primitiva de dicha función sobre este segmento, es válida la siguiente fórmula:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

La fórmula (1) se llama fórmula de Newton—Leibniz.

□ **Demostración.** Sea $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, conforme al teorema 6.7, la función $\Phi(x)$ es primitiva para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Así pues, $F(x)$ y $\Phi(x)$ son dos primitivas de la misma función $f(x)$ sobre $[a, b]$. Puesto que las primitivas se distinguen en constante (véase el teorema 6.1), o sea,

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

tiene lugar la igualdad

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde C es cierto número. Sustituyendo en esta igualdad el valor de $x = a$ y utilizando la propiedad 1ª (véase la fórmula (3) del § 6), tenemos

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

o sea, para cada $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Suponiendo aquí $x = b$, obtenemos la fórmula (1). ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ suele escribirse convencionalmente en la forma

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{o bien} \quad [F(x)]_a^b;$$

entonces la fórmula (1) se escribe así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Cabe subrayar una vez más que en la fórmula (1) como $F(x)$ puede tomarse toda primitiva de la función $f(x)$ en la familia $F(x) + C$.

Así pues, la fórmula obtenida (1) establece, por un lado, la relación entre las integrales definida e indefinida y, por otro lado, ofrece un método sencillo para calcular la integral definida: *la integral definida de una función continua es igual a la diferencia de valores de toda primitiva suya calculados para los límites de integración superior e inferior.* Esta fórmula abre amplias posibilidades para el cálculo de las integrales definidas, ya que el problema de calcular una integral definida se reduce al de calcular una integral indefinida que hemos considerado con bastante plenitud.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx$.

Resolución. Puesto que en calidad de una de las primitivas para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ sirve la función $F(x) = -\cos x$, entonces, aplicando la fórmula de Newton — Leibniz, resulta

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Resolución. Según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}. \; \bullet$$

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 (3x^2 - 1) \, dx$. (*Resp.* 6). **2.** $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. (*Resp.* $\ln 2$.)

3. $\int_1^2 e^x \, dx$. (*Resp.* $e(e-1)$.) **4.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. (*Resp.* $\ln(3+\sqrt{10})$.) **5.** $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$. (*Resp.* 2.)

6. $\int_a^b x^n \, dx$ $(n \neq -1)$. $\left(\textit{Resp.} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.\right)$

El siguiente ejemplo muestra que la utilización formal de la fórmula de Newton — Leibniz, sin tener en cuenta las condiciones de su aplicabilidad, puede llevar a un resultado falso.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Resolución. Según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Aquí la fórmula de Newton — Leibniz está empleada correctamente, ya que la función $F(x) = \operatorname{arctg} x$ es continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y la igualdad $F'(x) = f(x)$ se cumple en todo este segmento. En cambio, si en calidad de primitiva de la función se toma $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$, la aplicación formal de la fórmula de Newton — Leibniz conduce a la igualdad

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Hemos obtenido un resultado falso, ya que $\pi/2 \neq -\pi/2$. El error se debe a que para $x = 0$ la función $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ es discontinua y no puede ser primitiva. La fórmula de Newton — Leibniz ha de emplearse cuando la primitiva $F(x)$ es continua en el segmento asignado. ●

Observación. La fórmula de Newton — Leibniz fue deducida suponiendo que la función subintegral $f(x)$ es continua. A ciertas condiciones la fórmula de Newton — Leibniz puede emplearse también para las funciones discontinuas.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese la fórmula de Newton — Leibniz.
2. ¿Por qué la fórmula de Newton — Leibniz se considera fundamental para el cálculo integral?

§ 9. Cambio de la variable en la integral definida

Teorema 6.9. *Sea $f(x)$ una función continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces si:* 1) *la función $x = \varphi(t)$ es derivable en $[\alpha, \beta]$ y $\varphi'(t)$ es continua sobre $[\alpha, \beta]$;* 2) *el segmento $[a, b]$ es conjunto de los*

valores de la función $x = \varphi(t)$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ *y* $\varphi(\beta) = b$ (fig. 180), *es válida la fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

□ **Demostración.** Según la fórmula de Newton — Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es cualquier primitiva para la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por otro lado, examinemos la función compuesta $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$. Conforme a la regla de derivación de una función compuesta encontramos

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

De aquí se deduce que la función $\Phi(t)$ es primitiva para la función $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, continua sobre $[\alpha, \beta]$, y por eso de acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz resulta

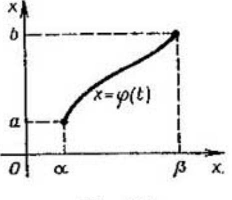


Fig. 180

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \;\blacksquare$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de cambio de la variable* o *de sustitución en la integral definida.*

Observación 1. Si al calcular una integral indefinida con ayuda de cambio de la variable debemos retornar de la nueva variable t a la vieja variable x, esto se puede no hacer, calculando una integral definida, ya que el objetivo consiste en hallar un número que en virtud de la fórmula demostrada sea igual a valor de cada una de las integrales consideradas.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Resolución. Consideremos la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Tal cambio de la variable satisface todas las hipótesis del teorema 6.9. Efectivamente, en primer lugar, $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$ es continua en el segmento $[0, a]$, en segundo lugar, la función $x = a \operatorname{sen} t$ es derivable en $[0, \pi/2]$ y $x'_t = a \cos t$ es continua en $[0, \pi/2]$ y, en tercer lugar, al variar t de 0 a $\pi/2$ la función $x = a \operatorname{sen} t$ crece de 0 a a, con la particularidad de que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\pi/2) = a$. Puesto que $dx = (a \operatorname{sen} t)'\, dt = a \cos t\, dt$, entonces, aplicando la fórmula (1), obtenemos

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t\, dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \quad \bullet$$

Observación 2. Al utilizar la fórmula (1) es necesario comprobar el cumplimiento de las hipótesis citadas en el teorema. Si estas hipótesis se infringen, el cambio de la variable según la fórmula indicada puede llevar a un resultado erróneo.

○ **Ejemplo 2.** Calcular la integral $\int_0^\pi dx$.

Resolución. Tenemos $\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$. Por otro lado,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

La sustitución $t = \operatorname{tg} x$ conduce formalmente al siguiente resultado

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1 + t^2} = 0.$$

Hemos obtenido un resultado falso, ya que $\pi \neq 0$. Esto se debe al hecho de que la función $t = \operatorname{tg} x$ es discontinua para $x = \pi/2$ y no satisface las suposiciones del teorema 6.9.

Ejercicio. 1) Hallar el error cometido al calcular la integral de una manera siguiente:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{t}\ ;\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & -2 & 2 \\ \hline t & -1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right|^{1)} =$$

$$= -\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{t^2\left(4+\frac{1}{t^2}\right)} = -\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{4t^2+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2t \Big|_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}.$$

(El resultado es evidentemente erróneo, la integral de la función $\left(\frac{1}{4+x^2} > 0\right)$ que en todas las partes es positiva resulta igual al número negativo $-\pi/4$.) 2) Calcular la integral dada. (*Resp.* $\pi/4$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿A qué condiciones es válida la fórmula de cambio de la variable en la integral definida?
2. ¿Por qué al cambiar la variable en una integral definida se puede no retornar a la vieja variable?
3. Cítese un ejemplo cuando el incumplimiento de las hipótesis del teorema 6.9 conduciría a un resultado erróneo.

§ 10. Fórmula de integración por partes en la integral definida

Teorema 6.10. *Si las funciones* $u(x)$ *y* $v(x)$ *son continuas junto con sus derivadas* $u'(x)$ *y* $v'(x)$ *en un segmento* $[a, b]$, *es válida la fórmula*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (1)$$

[1]) Aquí las líneas verticales separan las notaciones auxiliares. El cambio de los límites de integración es cómodo escribirlo en forma de una tabla

x	a	b
t	α	β

□ **Demostración.** Puesto que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen, según la hipótesis, derivadas, entonces por la regla de derivación del producto

$$[u(x)\,v(x)]' = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x).$$

De aquí se desprende que la función $u(x)\,v(x)$ es primitiva para la función $u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$. Como la función $u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la integral de ella existe, o sea, esta función es integrable sobre dicho segmento y por la fórmula de Newton — Leibniz

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)]\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b.$$

De aquí, conforme a la propiedad 4ª de las integrales definidas (véase el subp. 2 del § 6), resulta

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u,$$

o sea, obtenemos la fórmula (1). ■

La fórmula (1) se llama *fórmula de integración por partes en la integral definida.*

○ **Ejemplo 1.** Calcular $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, de aquí $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = x$ y por la fórmula (1) encontramos

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1.$$

Ejemplo 2. Calcular $\int_1^2 xe^x\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$, de aquí $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = e^x$ y por la fórmula (1) tenemos

$$\int_1^2 xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x = [e^x(x-1)]_1^2 = e^2.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Resolución. Pongamos $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, de aquí $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$ y según la fórmula (1) resulta

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}. \quad \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese la fórmula de integración por partes en la integral definida.
2. ¿Dónde concretamente se ha utilizado en la demostración la hipótesis de continuidad de las derivadas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$?

§ 11. Algunas aplicaciones de la integral definida en la física y en la geometría

1. Área de un trapecio curvilíneo. Supongamos que en el plano Oxy se da una figura limitada por el segmento $[a, b]$ del eje Ox, por las rectas $x = a$, $x = b$ y por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ en $[a, b]$. Tal figura se llama trapecio curvilíneo cuya área S [1]) puede ser calculada según la fórmula

$$S \approx \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, escojamos en cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, un punto ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ y examinemos la figura escalonada (fig. 181). Supondremos que su área es aproximadamente igual al área S del trapecio curvilíneo

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\, \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por lo tanto, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (1). Puesto que la función $f(x)$ es continua en

[1]) El concepto de área de una figura plana arbitraria (así como el de volumen de un cuerpo y de área de una superficie) se considera en todo manual completo del análisis matemático.

el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma existe para $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{\Delta x_i\} \to 0$ y el área S del trapecio curvilíneo es numéricamente igual a la integral definida de la función $f(x)$ en $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Así pues, *la integral definida de la función continua no negativa $f(x)$ en $[a, b]$ es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo que*

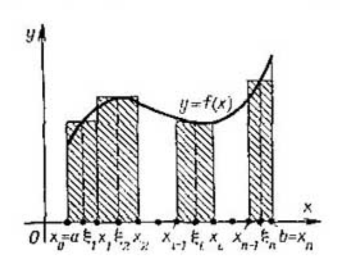


Fig. 181

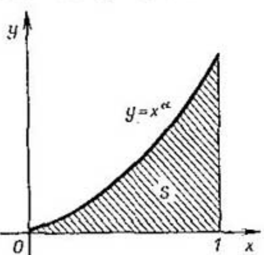


Fig. 182

tiene por base $[a, b]$ y está limitado superiormente por la gráfica de la función $y = f(x)$. En esto consiste el significado geométrico de la integral definida.

○ **Ejemplo 1.** Hallar el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, por la recta $x = 1$ y por el eje Ox (fig. 182).

Resolución. Por la fórmula (1) tenemos

$$S = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

En este caso si $\alpha = 1$, entonces $S = 1/2$; si $\alpha = 2$, entonces $S = 1/3$, etc. ●

Problemas más complicados referentes al cálculo de las áreas se resuelven utilizando la propiedad de aditividad del área: se puede partir la figura en partes disjuntas y calcular el área de toda la figura como suma de las partes de estas áreas.

○ **Ejemplo 2.** Hallar el área S de una figura limitada por las líneas $y = x$, $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

Resolución. La figura dada puede ser examinada como trapecio curvilíneo limitado por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y por la gráfica de la función que en el segmento $[0, 1]$ es igual a x

y en el segmento [1, 3], a $1/x^2$. No es fácil escribir la primitiva de tal función. Por esta razón dividamos el trapecio curvilíneo dado en dos partes por la recta $x = 1$ (fig. 183). Las área de estas partes pueden encontrarse fácilmente según la fórmula (1):

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Conforme a la propiedad de aditividad del área, $S = S_1 + S_2 = 7/6$. ●

Para calcular las áreas de las figuras es útil, a veces, una propiedad más del área que se llama *invariación respecto a los desplazamientos*: las figuras iguales tienen iguales áreas.

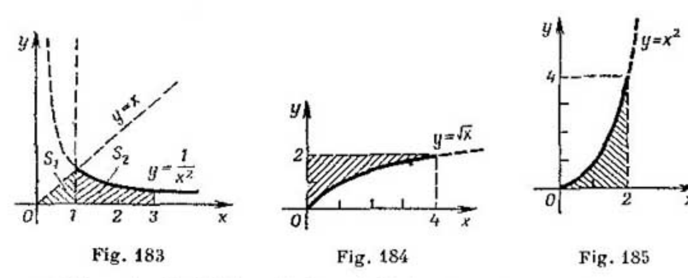


Fig. 183 Fig. 184 Fig. 185

○ **Ejemplo 3.** Hallar el área S de la figura limitada por las líneas $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

Resolución. La figura dada (fig. 184) será un trapecio curvilíneo si se refleja respecto a la recta $y = x$ (fig. 185). En este caso la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ se aplica en la gráfica de la función inversa $y = x^2$ y la recta $y = 2$, en recta $x = 2$. Puesto que las figuras simétricas son iguales, tienen iguales áreas, por eso según la fórmula (1) tenemos

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Observación. Otra solución de este problema puede encontrarse observando que la figura dada se complementa por un trapecio curvilíneo (de abajo) hasta obtener un rectángulo cuya área vale 8. Por esta razón

$$S = 8 - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left(8 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Esta solución es un ejemplo más cuando se utiliza la propiedad de aditividad del área: la figura dada se representa como «diferencia» de dos figuras más sencillas.

El procedimiento de calcular las áreas, considerado en la observación, puede enunciarse en una forma más general. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se prefijan dos funciones continuas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$, con la particularidad de que para todos los valores de x de este segmento $y_1 \leqslant y_2$. Hallemos el área de la figura

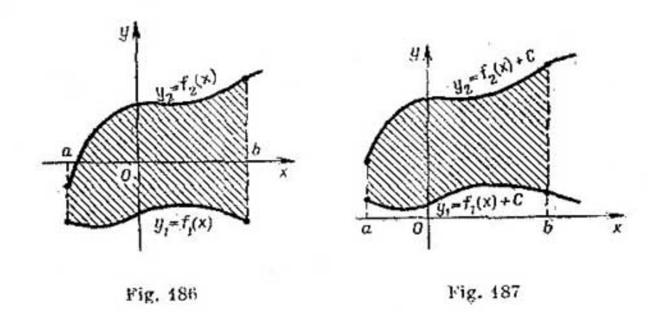


Fig. 186 Fig. 187

limitada por las gráficas de estas funciones, así como por las rectas $x = a$ y $x = b$ (fig. 186).

Si ambas funciones son no negativas, el área de la figura dada es igual a la diferencia de áreas de los trapecios curvilíneos limitados arriba por las gráficas de las funciones $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, respectivamente, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas. Por consiguiente, el área S de la figura dada puede encontrarse así:

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (2)$$

La fórmula (2) es válida para todas funciones continuas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$, no obligatoriamente positivas. Efectivamente, si las funciones y_1 e y_2 pueden tomar también valores negativos (como antes $y_1 \leqslant y_2$) (fig. 186), añadiremos a ambas funciones una misma constante C que elegiremos tan grande que las gráficas de las funciones $y_3 = f_1 + C$ e $y_4 = f_2 + C$ resulten superiores que el eje de abscisas (fig. 187). La figura 187 se obtiene de la figura 186 por la traslación paralela y por esta razón tiene la misma área. A la figura

187 le es aplicable la fórmula (2):

$$S = \int_a^b [f_2(x) + C]\,dx - \int_a^b [f_1(x) + C]\,dx =$$

$$= \int_a^b [(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C)]\,dx.$$

Puesto que $(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C) = f_2(x) - f_1(x)$, la fórmula (2) es justa también para la figura 186.

○ **Ejemplo 4. Hallar el área de una figura limitada por las gráficas de las funciones $y_1 = f_1(x) = x$ e $y_2 = f_2(x) = 2 - x^2$ (fig. 188).**

Resolución. En la fig. 188 se ve que de límites de integración sirven las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones dadas. Encontrémoslas. Para esto resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Como resultado obtenemos $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Encontramos ahora el área buscada con ayuda de la fórmula (2):

$$S = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo 5. Hallar el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la tangente a ella en el punto (3; 5) y el eje Oy.

Resolución. La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en el punto (3; 5) tiene la forma $y - 5 = f'(3)(x - 3)$. Puesto que $f'(x) = 2x - 2$ y $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$, obtenemos la ecuación de la tangente $y - 5 = 4(x - 3)$ o bien $y = 4x - 7$. Como las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, ella se halla por encima de la tangente, o sea, $x^2 - 2x + 2 \geqslant 4x - 7$ sobre el segmento [0, 3] (fig. 189) Según la fórmula (2) encontramos el área buscada:

$$S = \int_0^3 [x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9. \quad ●$$

Ejercicios. Calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas:

1. $y=4-x^2$, $y=0$. $\left(\textbf{\textit{Resp.}}\ \frac{32}{3}.\right)$ **2.** $y^2=2px$, $x=h$. $\left(\textbf{\textit{Resp.}}\ \frac{4}{3}h\sqrt{2ph}.\right)$ **3.** $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$. (***Resp.*** 1.) **4.** $y=x^2$, $y=2-x^2$. $\left(\textbf{\textit{Resp.}}\ \frac{8}{3}.\right)$ **5.** $y=\operatorname{sen} 3x$, $y=0$, donde $0\leqslant x\leqslant\pi/3$. (*Resp.* 2/3.) **6.** $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$. (***Resp.*** $4\ln(4e)$.)

Para calcular el área de un trapecio curvilíneo en el caso en que la frontera superior se da por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$,

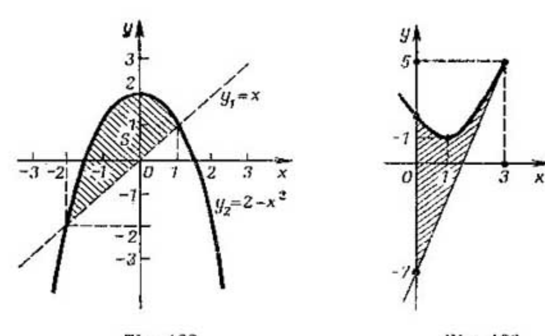


Fig. 188 Fig. 189

$y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ en la fórmula (1) es necesario hacer el cambio de la variable, poniendo $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Entonces resulta

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

donde α y β son los valores del parámetro t correspondientes a los valores de $x=a$ y $x=b$, o sea, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

○ **Ejemplo 6.** Hallar el área de una figura limitada por una onda de la cicloide [1]) $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, y por el eje Ox (fig. 190).

---

[1]) La cicloide es una curva plana descrita por el punto M de una circunferencia de radio a cuando ésta rueda, sin deslizarse, sobre una recta.

Resolución. Según la fórmula (3) tenemos

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\, a(1-\cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \quad \bullet$$

Sería interesante obtener con ayuda de la integración la conocida fórmula para el área de un círculo de radio R.

○ **Ejemplo 7.** Mostrar que el área S de un círculo de radio R es igual a πR^2.

Resolución. Planteemos la integral deseada. Para esto introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy y examinemos el círculo de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas (fig. 191). Este

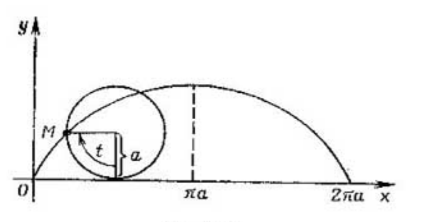


Fig. 190

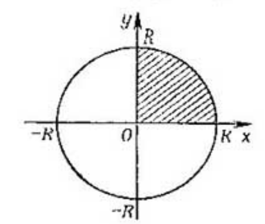


Fig. 191

círculo es conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la relación $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Una cuarta parte del círculo en el cuadrante I es un trapecio curvilíneo limitado por el gráfico de la función $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = R$. Por consiguiente,

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Vamos a calcular esta integral. Hagamos la sustitución $x = R \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Verifiquemos la validez de tal sustitución de la variable, o sea, aclaremos si se cumplen o no las hipótesis del teorema 6.9. Tenemos:

1) la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ es continua en el segmento $[0,\ R]$ y la función $x = \varphi(t) = R \operatorname{sen} t$ es derivable en el segmento $[0,\ \pi/2]$: su derivada $\varphi'(t) = R\cos t$ es continua en este segmento:

2) al crecer t de 0 a $\pi/2$ la función $\varphi(t) = R$ sen t crece de 0 a R, o sea, el conjunto de los valores de la función $x = \varphi(t)$ es el segmento $[0, R]$;

3) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi/2) = R$.

Por lo tanto, la sustitución $x = R$ sen t satisface todas las hipótesis del teorema 6.9. Aplicando la fórmula (1) del § 9, encontramos

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t}\, R\cos t\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{R^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

De suerte que hemos obtenido la fórmula del área del círculo: $S = \pi R^2$. ●

2. Área de un sector curvilíneo. Supongamos que la curva AB está prefijada en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

con la particularidad de que la función $\rho(\varphi)$ es continua y no negativa en el segmento $[\alpha, \beta]$. Llamaremos *sector curvilíneo* a una figura plana limitada por la curva AB y dos radios polares que constituyen con el eje polar los ángulos α y β (fig. 192). El área del sector curvilíneo puede ser calculada por la fórmula

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[\alpha, \beta]$ en n partes por los puntos $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$, escojamos sobre cada segmento parcial $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ un punto arbitrario ξ_i $(\varphi_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant \varphi_i)$ y construyamos los sectores circulares de radios $\rho(\xi_i)$.

Como resultado hemos obtenido una figura en forma de abanico cuya área puede considerarse igual, aproximadamente, al área S del sector curvilíneo:

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i,$$

donde $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Así pues, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (4). Puesto que la función $\rho^2(\varphi)$ es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, el límite de esta suma existe cuando $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta\varphi_i\} \to 0$ y el área del sector curvilíneo es numéricamente

igual a la integral definida de la función $\rho^2(\varphi)$ en el segmento $[\alpha, \beta]$:

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

De aquí se deduce la validez de la fórmula (4). ■

○ **Ejemplo 8.** Calcular el área de una figura limitada por el eje polar y por la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$, donde a es un número entero (fig. 193).

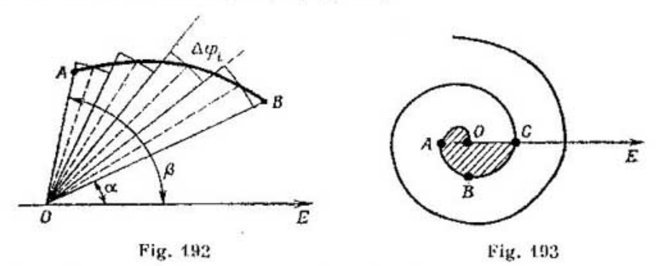


Fig. 192 Fig. 193

Resolución. Al variar φ de 0 a 2π el radio polar describirá una curva que limita el sector curvilíneo $OABC$. Por eso según la fórmula (4) tenemos

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\,\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\,\pi^3a^2. \quad ●$$

Notemos que el punto C está alejado del polo a una distancia $\rho = 2\pi a$. Por esta razón el círculo de radio OC tiene el área igual a $\pi\cdot OC^2 = 4\pi^3a^2 = 3\cdot\frac{4}{3}\pi^3a^2 = 3S_{OABC}$, o sea, el área de la figura limitada por el eje polar y la primera espira de la espiral de Arquímedes es igual a 1/3 parte del círculo cuyo radio es igual al mayor de los radios polares de la espira. Esta conclusión fue sacada aún por Arquímedes.

3. Longitud del arco de una curva. Supongamos que la curva plana AB se prefija mediante la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, donde $f(x)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$. Partamos la curva AB en n partes arbitrarias por los puntos $A = M_0, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$ en el sentido de A a B. Uniendo estos puntos por las cuerdas, obtendremos cierta línea quebrada inscrita cuyo perímetro se designa con P (fig. 194). Designemos con l_i la longitud de un lado $M_{i-1}M_i$ de la línea quebrada y con μ, la longitud del mayor de sus lados: $\mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{l_i\}$.

Definición. *El número L se llama límite de los perímetros P para $\mu \to 0$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda quebrada en la*

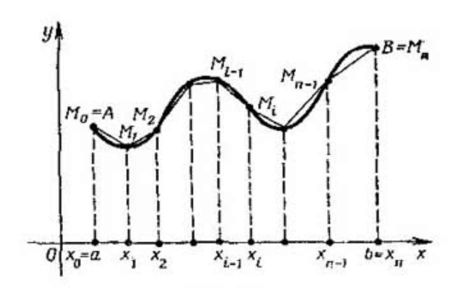


Fig. 194

cual $\mu < \delta$ se cumpla la desigualdad

$$| L - P | < \varepsilon.$$

Si existe el límite finito L del parámetro P de una línea quebrada inscrita en la curva cuando $\mu \to 0$, este límite se denomina *longitud del arco* $\overset{\smile}{AB}$:

$$L = \lim_{\mu \to 0} P.$$

Si la función $f(x)$ es continua junto con $f'(x)$ en el segmento $[a, b]$, la longitud del arco $\overset{\smile}{AB}$ se expresa por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{5}$$

☐ **Demostración.** Designemos con x_i y $f(x_i)$ las coordenadas del punto M_i, así que para las abscisas de estos puntos obtenemos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Entonces la longitud de un lado de la quebrada es igual a

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Según la fórmula de Lagrange tenemos

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$
$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Por consiguiente,

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Así pues, el perímetro de toda la quebrada es igual a

$$P=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

o sea, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (5). Como la función $\sqrt{1+f'^2(x)}$ es continua en el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ existe y es igual a la integral definida (5). Puesto que $\lambda\leqslant\mu$ [1]), entonces $\lambda\to 0$ cuando $\mu\to 0$. Por consiguiente,

$$L=\lim_{\mu\to 0} P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad ■$$

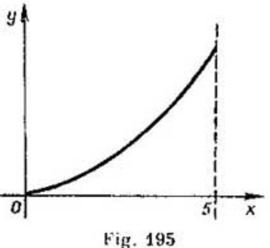


Fig. 195

○ **Ejemplo 9.** Calcular la longitud del arco de una parábola semicúbica $y=x^{3/2}$ de $x=0$ a $x=5$ (fig. 195).

Resolución. De la ecuación $y=x^{3/2}$ obtenemos $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. De tal modo, según la fórmula (5) resulta

$$L=\int_0^5\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^5=\frac{335}{27}. \quad ●$$

Al calcular la longitud del arco en el caso en que la curva AB se asigna por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, donde α y β son los valores del parámetro t correspondientes a los valores de $x=a$ y $x=b$, o sea, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ en la fórmula $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ es necesario hacer el cambio de la variable, poniendo $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Resulta

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{6}$$

[1]) $l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$, de donde $|\Delta x_i|\leqslant l_i$.

○ **Ejemplo 10.** Calcular la longitud del arco de una onda de la cicloide:

$x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (véase la fig. 190).

Resolución. De la ecuación de la cicloide obtenemos $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a \operatorname{sen} t$. Cuando x recorra el segmento $[0, 2\pi a]$ el parámetro t recorrerá el segmento $[0, 2\pi]$. Por consiguiente, la longitud buscada del arco es igual a

$$L = \int_0^{2\pi a} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \quad ●$$

Al calcular la longitud del arco en el caso en que la curva AB se da en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, donde $\rho(\varphi)$ tiene la derivada continua $\rho'(\varphi)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y a los puntos A y B corresponden los valores de α y β, pasando de las coordenadas polares (véase el cap. 2, § 3, fórmula (1)) a las rectangulares, obtenemos la representación paramétrica de la curva AB por las ecuaciones $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$ con el parámetro φ. Entonces

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho \operatorname{sen} \varphi,$$

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi) \operatorname{sen} \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi$$

y la fórmula (6) se escribe así:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi, \tag{7}$$

donde α y β son los valores del parámetro φ.

○ **Ejemplo 11.** Calcular la longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ (véase la fig. 193).

Resolución. La primera vuelta de la espiral de Arquímedes se forma al variar el ángulo polar φ de 0 a 2π. Entonces, según la fór-

mula (7), la longitud buscada del arco es igual a

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1}; & du=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi \\ dv=d\varphi, & v=\varphi. \end{matrix}\right|=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right]=a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^{2\pi}=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Esta integral está calculada integrando por partes (véase el § 10).

Ejemplo 12. Mostrar que la longitud L de una circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$.

Resolución. La gráfica de la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$ para $0\leqslant x\leqslant R/\sqrt{2}$ es una octava parte de la circunferencia (fig. 191). Por consiguiente,

$$\frac{L}{8}=\int_0^{R/\sqrt{2}}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Puesto que $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, entonces $1+[f'(x)]^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$. Por eso, según la fórmula (5), resulta

$$\frac{L}{8}=R\int_0^{R/\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Al igual que en el ejemplo 7 hagamos el cambio de la variable: $x=R\,\text{sen}\,t$, donde $0\leqslant t\leqslant\pi/4$. Entonces según la fórmula (1) del

cambio de la variable, dada en el § 9, tenemos

$$\frac{L}{8}=R\int_{0}^{\pi/4}\mathrm{d}t=\frac{\pi R}{4},$$

de donde llegamos al resultado deseado. ●

Observación. Aunque en el ejemplo 12 fuera más cómodo considerar la integral dentro de los límites de 0 a R, hemos procedido de otro modo. Esto se debe al hecho de que al deducir la fórmula de la longitud del arco se suponía que la función $y=f(x)$ tiene una derivada continua en todo el segmento $[a, b]$; en el caso dado para $x=R$ la derivada de la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$ se convierte en infinito.

En conclusión examinemos el concepto de diferencial de un arco que es interesante de por sí.

Si en la fórmula (5) el límite superior b se reemplaza por la variable x, la longitud del arco llegará a ser función del límite superior y la fórmula (5) se escribirá así:

$$l(x)=\int_{a}^{x}\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

donde $l(x)$ es la longitud variable del arco. Puesto que aquí la función subintegral es continua, entonces, conforme al teorema 6.7 sobre la derivada de la integral respecto al límite superior variable, tenemos

$$l'(x)=\left(\int_{a}^{x}\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t\right)'_x=\sqrt{1+f'^2(x)},$$

de donde se deduce la fórmula para la integral del arco

$$\mathrm{d}l=l'(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{o bien} \quad \mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad (8)$$

puesto que $y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, entonces $\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ y finalmente resulta

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}. \qquad (9)$$

La fórmula (9) permite dar una interpretación geométrica sencilla de la diferencial del arco $\mathrm{d}l$. Elevando al cuadrado, obtenemos $(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$. Teniendo en cuenta que la diferencial de la función $y=f(x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente (véase el cap. V, § 3, subp. 1), resulta que la diferencial del arco $\mathrm{d}l$ (fig. 196) es igual a la longitud del segmento de la tangente a la curva entre el punto de tangencia $M(x; y)$ y el punto $P(x+\mathrm{d}x; y+\mathrm{d}y)$ o

sea, es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos $|dx|$ y $|dy|$ y la igualdad $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ representa el teorema de Pitágoras.

4. Área de una superficie de revolución. Supongamos que la curva AB se da por la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ y la función $y = f(x)$ es no negativa y continua junto con su primera derivada en

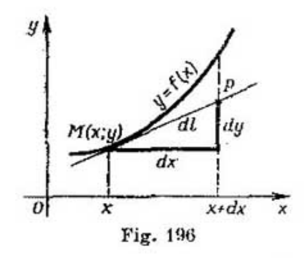


Fig. 196

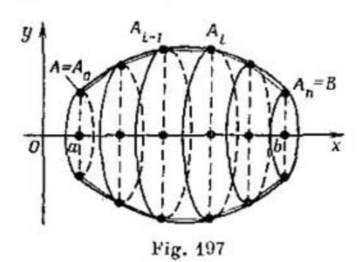


Fig. 197

el segmento $[a, b]$. Entonces la superficie engendrada por la revolución de la curva AB alrededor del eje Ox tiene el área S que puede ser calculada según la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{10}$$

□ **Demostración.** Tomemos en la curva AB un punto M con una abscisa x. Entonces la longitud del arco AM se determina mediante la fórmula

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt.$$

Puesto que la función $l(x)$ es creciente ($\sqrt{1 + f'^2(x)} > 0$) y continua ($l(x)$ es derivable) en el segmento $[a, b]$ entonces, conforme al teorema 4.15, en este segmento para ella existe la función inversa $x = \varphi(l)$. Pero entonces $y = f(x) = f[\varphi(l)] = \psi(l)$ es una función compuesta respecto a l, continua en $[0, L]$, donde L es la longitud de la curva AB. Por lo tanto, la curva AB puede ser representada de modo paramétrico mediante las ecuaciones $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, donde l es el parámetro.

Dividamos la curva AB en n partes por los puntos $A = A_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ (fig. 197). Designemos con $\Delta l = l_i - l_{i-1}$ la longitud del arco parcial $A_{i-1}A_i$. Al girar la curva AB en torno al eje Ox obtenemos la superficie compuesta por n superficies laterales que son, aproximadamente, iguales a las superfi-

cies laterales de los conos truncados (cilindros). El área de la superficie lateral del i-ésimo cono truncado (cilindro) es igual al producto de la longitud de la circunferencia $2\pi R$ (R vale la semisuma de los radios de las bases superior e inferior del cono) por la longitud de la generatriz (de la cuerda $A_{i-1}A_i$). Por esta razón si ponemos $R = y(\xi_i)$, $l_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant l_i$ y la longitud de la cuerda $A_{i-1}A_i$ igual a Δl_i, obtenemos que la superficie S_i de la superficie lateral es, aproximadamente, igual a

$$S_i \approx 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

El área de toda la superficie de revolución es igual, aproximadamente, a la suma de las áreas de las superficies laterales S_i, o sea,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

Por otro lado, esta suma es suma integral. Puesto que la función $y(l)$ es continua sobre $[0, L]$, el límite de está suma para $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $y(l)$ en $[0, L]$. Por consiguiente,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i$$

o bien

$$S = 2\pi \int_0^L y(l)\,dl. \tag{11}$$

En la integral (11) pasemos de la variable de integración l a la variable x. Estas variables están relacionadas por la fórmula $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$. Si $l = 0$, $x = a$ y si $l = L$, $x = b$. Y como $y = y(l) = f(x)$ y $dl = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ (véase la fórmula (8)), de la fórmula (11) finalmente obtenemos

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad \blacksquare$$

Observación. Si la superficie dada se obtiene, girando la curva AB, asignada por la ecuación $x = \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, alrededor del eje Oy, su superficie

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,dy.$$

○ **Ejemplo 13.** Una parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos que se encuentran uno de otro a una distancia H se llama *zona esférica* de altura H. Calcular el área de la superficie de una zona esférica si el radio de la esfera es igual a R y la altura de la zona es igual a H (fig. 198).

Resolución. La superficie de la zona esférica puede considerarse como superficie de un cuerpo obtenido por girar el arco de la

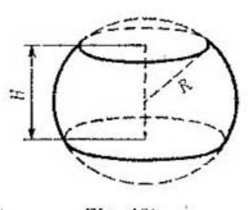


Fig. 198

Fig. 199

circunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$, donde $a\leqslant x\leqslant b$, $b-a=H$, alrededor del eje Ox (fig. 199). Puesto que $y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, entonces $1+[f'(x)]^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$; por esta razón según la fórmula (10),

$$S=2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\int_a^b dx=2\pi R\,(b-a)=2\pi RH.$$

De suerte que el área de la superficie S de la zona esférica se calcula por la fórmula $S=2\pi RH$. Si $H\to 2R$, en el límite obtenemos el área de la superficie de toda la esfera: $S=4\pi R^2$. ●

Observación. De la solución del ejemplo 13 se deduce, verbigracia, que si alrededor de la esfera está circunscrito un cilindro, la superficie de la zona esférica comprendida entre dos planos que son perpendiculares al eje del cilindro es igual a la parte de la superficie del cilindro comprendida entre estos mismos planos.

Si la superficie se obtiene girando en torno al eje Ox la curva AB representada por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, con la particularidad de que $\psi(t)\geqslant 0$, $\varphi(t)$ varía de a a b al variar t de α a β, entonces, realizando en la integral (10) el cambio de la variable con ayuda de las fórmulas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, obtenemos

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (12)$$

Por último, si la curva está prefijada por la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, donde $\rho(\varphi)$ tiene una derivada continua en el segmento $[\alpha, \beta]$, este caso, como ya hemos señalado en el subp. 3, con ayuda de las fórmulas de paso $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$,

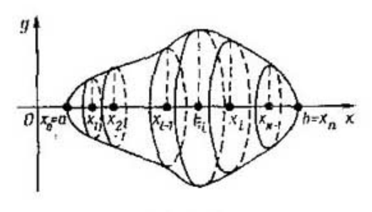


Fig. 200

$y = \rho(\varphi)\operatorname{sen}\varphi$ se reduce a la forma paramétrica de representación de la curva y la fórmula (12) se escribe así:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \operatorname{sen}\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

○ **Ejemplo 14.** Calcular el área S de la superficie obtenida por la revolución de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ en torno al eje Ox (véase la fig. 190).

Resolución. Según la fórmula (12) tenemos

$$S = 2\pi \int_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{(a \operatorname{sen} t)^2 + [a(1 - \cos t)]^2}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt = \frac{64}{3}\pi a^2. \quad \bullet$$

5. Volumen de un cuerpo. Como ya se sabe, con ayuda de la integral definida pueden ser calculadas las áreas de las figuras y las longitudes de las curvas. La determinación de los volúmenes de ciertos cuerpos puede también reducirse al cálculo de las integrales definidas.

Examinemos cierto cuerpo (fig. 200) y calculemos su volumen V. Admitamos que están conocidas las áreas de secciones de este cuerpo por los planos perpendiculares al eje Ox. Con la variación de x el área de la sección también variará, o sea, será cierta función de x. Designemos esta función con $S(x)$ y la consideraremos función conti-

nua en un segmento $[a, b]$. Entonces el volumen del cuerpo

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{13}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Tracemos por estos puntos los planos perpendiculares al eje Ox. Estos planos partirán el cuerpo en n capas. Determinemos el volumen de la i-ésima capa engendrada por las secciones de abscisas x_{i-1} y x_i. Su volumen V_i es, aproximadamente, igual al volumen del cilindro recto cuya base coincide con la sección del cuerpo correspondiente a cualquier punto ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ y, por consiguiente, tiene el área $S(\xi_i)$ y cuya altura es igual a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o sea,

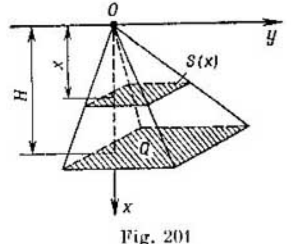


Fig. 201

$$V_i \approx S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

La suma de los volúmenes de todas las n capas es, aproximadamente igual al volumen V del cuerpo dado:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por lo tanto, hemos obtenido la suma integral para la integral (13). Puesto que la función $S(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida (13). Así pues,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

○ **Ejemplo 15.** Calcular el volumen de una pirámide cuya altura es igual a H y área de la base, a Q.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy de un modo tal que el origen de coordenadas esté en el vértice de la pirámide y el eje Ox pase, a lo largo de la altura H, del vértice a la base (fig. 201). Cortemos la pirámide por un plano paralelo a la base. Designemos con x, $0 \leqslant x \leqslant H$, la distancia entre el vértice de la pirámide y el plano secante y con $S(x)$ el área de la sección. Determinemos la función $S(x)$. Para esto utilicemos la propiedad de las sec-

ciones de una pirámide paralelas a la base (esta propiedad se enuncia en manuales de geometría elemental) y escribamos la proporción

$$\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2},$$

de donde encontramos

$$S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

Sustituyendo la última igualdad en la fórmula (13), tenemos

$$V=\int_0^H S(x)\,dx=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2\,dx=\frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2\,dx=$$
$$=\frac{Q}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{QH^3}{3H^2}=\frac{1}{3}QH.$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula del volumen de la pirámide: $V=\frac{1}{3}QH$. ●

En el caso particular en que el cuerpo está engendrado girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo representado por la función continua $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, el volumen del cuerpo de revolución se

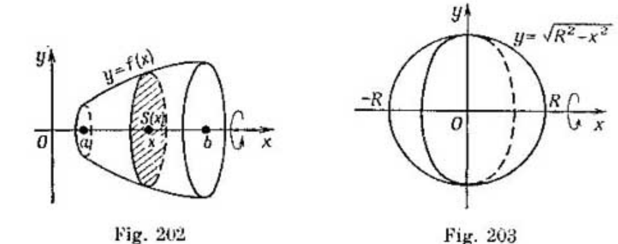


Fig. 202 Fig. 203

calcula según la fórmula

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx. \qquad (14)$$

Efectivamente, la sección del cuerpo de revolución por un plano que es perpendicular al eje Ox y pasa por el punto x no es más que el círculo de radio $f(x)$ (fig. 202). Por esta razón el área de esta sección (el área del círculo) es igual a $\pi(f(x))^2$. Por lo tanto, para el cuerpo de revolución dado el área de la sección $S(x)=\pi(f(x))^2$.

De la fórmula (13) obtenemos que

$$V=\int_a^b \pi (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Observación. Si el trapecio curvilíneo $0\leqslant x\leqslant \varphi(y)$, $a\leqslant y\leqslant b$, gira alrededor del eje Oy, el volumen del cuerpo de revolución

$$V=\pi\int_a^b (\varphi(y))^2\,dy=\pi\int_a^b x^2\,dy.$$

○ **Ejemplo 16.** Calcular el volumen de una esfera de radio R.

Resolución. La esfera de radio R se obtiene girando la semicircunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$ alrededor del eje Ox (fig. 203), por eso el volumen V de la esfera se puede hallar con ayuda de la fórmula (14). Utilizando la simetría de esta esfera respecto al eje Oy, encontramos

$$V=\pi\int_{-R}^{R} (f(x))^2\,dx=2\pi\int_0^R \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx=$$

$$=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula del volumen de una esfera: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ●

Ejercicios. Calcular los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de una figura limitada por las líneas: **1.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, donde $y\geqslant 0$, alrededor del eje Ox. (*Resp.* $4/3\pi ab^2$.) **2.** $y^2=2px$, $x=h$ alrededor del eje Ox. (*Resp.* πph^2.) **3.** $y=\operatorname{sen} x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, alrededor de cada una de las siguientes rectas: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=2\pi$; 4) $x=-1$; 5) $x=-2$; 6) $y=1$; 7) $y=-2$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{\pi}{2};\ 2\pi^2;\ 6\pi^2;\ 2\pi(\pi+2);\ 2\pi(\pi+4);\ \frac{\pi(8-\pi)}{2};\ \frac{\pi(\pi+16)}{2}.\right)$ **4.** $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, alrededor del eje Ox (*Resp.* $3\pi/10$.) **5.** $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{\pi(e^2-1)}{2};\ 2\pi.\right)$ **6.** $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. (*Resp.* $6\pi/7$; $3\pi/5$.) **7.** $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ alrededor de cada una de las siguientes rectas: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=-1$; 4) $x=1$; 5) $x=-1$; 6) $y=1$. $\left(\textit{Resp.}\ \pi(e-2);\ \frac{\pi(e^2+1)}{2};\ \pi e;\ \frac{\pi(e^2-3)}{2};\right.$

$\frac{\pi(e^2+5)}{2}$; $\pi(4-e)$.) 8. $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$ alrededor del eje Ox. (*Resp.* $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.) 9. $y=4/x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy (*Resp.* 12π; 24π.) 10. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. (*Resp.* $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$; $\pi\ln 2$.)

6. Centro de gravedad de una curva y de un trapecio curvilíneo. Centro de gravedad de un sistema de puntos materiales. Supongamos que sobre el plano Oxy está prefijado un sistema de puntos materiales: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, . . ., $A_n(x_n;\ y_n)$ cuyas masas son iguales a m_1, m_2, . . ., m_n, respectivamente.

La suma de los productos de las masas de estos puntos por sus ordenadas se llama *momento estático* M_x de este sistema respecto al eje Ox:

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n.$$

De modo análogo se define el momento estático M_y del sistema respecto al eje Oy:

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n.$$

El punto que tiene por coordenadas $\left(\frac{M_y}{m};\ \frac{M_x}{m}\right)$, donde $m = m_1 + \ldots + m_n$, se denomina *centro de gravedad*[1]) del sistema.

Se puede mostrar que el centro de gravedad posee la propiedad siguiente: si en dicho centro se coloca una masa igual a la suma de masas de todos los puntos del sistema, el momento estático de esta masa respecto a todo eje es igual al momento estático de todo el sistema respecto a este eje.

De aquí se desprende que la posición del centro de gravedad del sistema no depende de la opción del sistema de coordenadas.

○ **Ejemplo 17.** Mostrar que el centro de gravedad del sistema constituido por tres puntos P, Q y R en los cuales están concentradas las masas unitarias ($m_P = m_Q = m_R = 1$) se halla en el punto de intersección de las medianas del triángulo (fig. 204).

Resolución. Vamos a convencernos, por ejemplo, de que el centro de gravedad está sobre la mediana PM. Introduzcamos el sistema de coordenadas en el plano del triángulo PQR de un modo tal que su centro (0; 0) se halle en el punto P y el eje Ox pase por la recta PM. En este caso si la ordenada del punto Q es igual a y_0, la ordenada del punto R es igual a $(-y_0)$. De aquí se deduce que la ordenada

[1]) No distinguimos los conceptos de «centro de gravedad» y de «centro de masas».

y_C del centro de gravedad C es igual a

$$y_C = \frac{0\cdot 1 + y_0\cdot 1 - y_0\cdot 1}{2} = 0.$$

Así pues, el punto C está sobre el eje Ox (recta PM). Razonando análogamente, podemos mostrar que el centro de gravedad C se halla sobre las medianas QL y RN. Por consiguiente, C es el punto de intersección de las medianas. ●

Supongamos ahora que las masas no están concentradas en puntos aislados sino se hallan situadas «de una manera continua» llenando

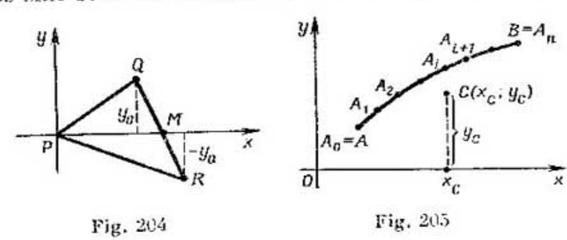


Fig. 204 Fig. 205

una línea o figura plana. En este caso para determinar el momento estático en vez de la suma se necesitará la integral.

Centro de gravedad de una curva. Consideremos cierta figura plana AB. Supondremos que: 1) la curva se da paramétricamente por las ecuaciones $x = \varphi(l)$ e $y = \psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, donde el parámetro l es la longitud del arco que va medida a partir del punto A; L, la longitud de toda la curva AB y las funciones $\varphi(l)$ y $\psi(l)$ son continuas en el segmento $[0, L]$; 2) la curva es homogénea, o sea, su densidad lineal ρ (la masa que toca como parte para la unidad de longitud) es constante y, por sencillez, es igual a la unidad.

Determinemos los momentos estáticos de esta curva respecto a los ejes Ox y Oy y su centro de gravedad (fig. 205). Para esto dividamos la curva AB en n partes por los puntos $A = A_0(x_0; y_0)$, $A_1(x_1; y_1)$, ..., $A_i(x_i; y_i)$, $A_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$, ..., $A_n(x_n; y_n) = B$ y supongamos que a estos puntos corresponden los valores de $l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_i < l_{i+1} < \ldots < l_n = L$ del parámetro l. Designemos la longitud del arco A_iA_{i+1} con $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$ y la masa de este arco con m_i. Entonces la masa $m_i = \rho\Delta l_i = \Delta l_i$ $(\rho = 1)$. Concentremos la masa de cada una de las partes A_iA_{i+1} en un punto cualquiera suyo, por ejemplo, en el punto $A_i(x_i; y_i)$. En este caso toda la curva AB puede ser sustituida, aproximadamente, por el sistema de los puntos materiales $A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$. Entonces el momento estático M_x de la curva AB es, aproximadamente, igual a la suma de los momentos estáticos del sistema

de los puntos materiales respecto al eje Ox:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i.$$

Por otro lado, esta suma es suma integral para la función $y = \psi(l)$ y como la función es continua en el segmento $[0, L]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $y = \psi(l)$ sobre $[0, L]$. Por consiguiente,

$$M_x = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i = \int_0^L y\,dl.$$

Análogamente encontramos

$$M_y = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i = \int_0^L x\,dl.$$

Puesto que la masa de toda la curva $m = \rho L = L$ $(\rho = 1)$, por la definición del centro de gravedad resulta

$$x_c = \frac{\int_0^L x\,dl}{L}; \quad y_c = \frac{\int_0^L y\,dl}{L}.$$

En el caso particular en que la curva AB se asigna por la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ y la diferencial del arco $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ (véase la fórmula (8)), las coordenadas del centro de gravedad de la curva AB se calculan mediante las fórmulas

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{L}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{L}. \tag{15}$$

De la fórmula para y_c se deduce que $L\cdot y_c = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, de donde, multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2π, obtenemos

$$2\pi y_c\cdot L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

El segundo miembro de la última igualdad es el área de la superficie obtenida por la revolución de la curva AB alrededor del eje Ox (véase la fórmula (10)) y la expresión $2\pi y_c$ presente en el primer miembro es la longitud de la circunferencia de radio y_c.

Por lo tanto, está obtenido el siguiente teorema.

Primer teorema de Guldin [1]. *El área de la superficie de un cuerpo obtenido, girando el arco de una curva plana alrededor de cierto eje, que no la corta y está situado en su plano es igual a la longitud de este arco multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita con esta revolución por el centro de gravedad de la curva.*

○ **Ejemplo 18.** Hallar el área de la superficie lateral de un cono.

Resolución. Un cono puede ser representado como cuerpo engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de un

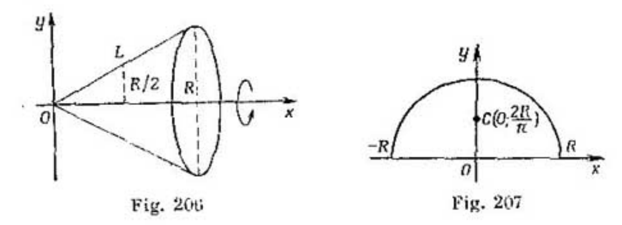


Fig. 206 Fig. 207

cateto suyo. Supongamos que el cateto dado está obtenido, girando un triángulo rectángulo, que tienen por hipotenusa L y por cateto R en torno al otro cateto. Introduzcamos el sistema de coordenadas de un modo tal que el eje de revolución sea eje de abscisas (fig. 206). Es evidente que el centro de gravedad del segmento está en su punto medio. Por eso el centro de gravedad de la generatriz del cono —de la hipotenusa del triángulo rectángulo— describe una circunferencia de radio $R/2$. Aplicando el primer teorema de Guldin, obtenemos el área S de la superficie lateral del cono: $S = L\cdot 2\pi R/2 = \pi RL$.

Ejemplo 19. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una semicircunferencia de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas; la semicircunferencia está en el semiplano superior a condición de que $\rho = 1$ (fig. 207).

Resolución. Puesto que la semicircunferencia está situada simétricamente respecto a la recta $x = 0$, el centro de gravedad del arco se encuentra sobre esta recta y $x_c = 0$. El área S de la superficie lateral de un cuerpo engendrado por la revolución de la semicircunferencia de longitud $L = \pi R$ alrededor del eje Ox es igual a $4\pi R^2$. Empleando el primer teorema de Guldin, obtenemos $2\pi y_c\cdot \pi R = 4\pi R^2$, de donde hallamos $y_c = 2R/\pi$. ●

Centro de gravedad de un trapecio curvilíneo. Análogamente al concepto de centro de gravedad de una curva se introduce el de centro de gravedad de un trapecio curvilíneo $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

[1] Paul Guldin (1577 — 1643), matemático suizo. Ambos teoremas citados los conocía aún en el siglo III de n.e. el eminente matemático griego Páppos.

Supondremos que: 1) la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$; 2) en este trapecio están distribuidas las masas de una manera tal que su densidad superficial ρ (la masa que toca como parte para la unidad del área) es constante y, por sencillez, pongámosla igual a la unidad. Entonces la masa de toda parte del trapecio se medirá por su área.

Determinemos los momentos estáticos de este trapecio respecto a los ejes Ox y Oy y su centro de gravedad (fig. 208). Para esto dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ y el trapecio curvilíneo por las rectas $x = x_i$ en n partes respectivas. Reemplacemos cada trapecio elemental por un rectángulo de base igual a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y de altura igual a $f(\xi_i)$, donde ξ_i es el punto medio $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la masa $m_i = \rho f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$ $(\rho = 1)$ es igual al área del i-ésimo rectángulo. De la mecánica es sabido que el centro de gravedad de un rectángulo está en el punto de intersección de sus diagonales y, por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad del i-ésimo rectángulo son iguales a ξ_i y $\frac{1}{2} f(\xi_i)$, respectivamente (véase la fig. 208). Concentremos la masa de cada i-ésimo rectángulo en su centro. Entonces todo el trapecio se sustituirá, aproximadamente, por el sistema de los puntos materiales: $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ (de los i-ésimos centros de gravedad de los rectángulos). Los momentos estáticos del i-ésimo rectángulo respecto a los ejes Ox y Oy son, respectivamente, iguales a

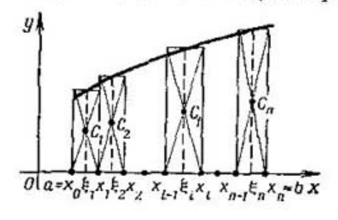


Fig. 208

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i \cdot \frac{1}{2} f(\xi_i) = \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{y} \quad f(\xi_i)\,\Delta x_i \xi_i$$

y los momentos estáticos M_x y M_y del trapecio dado son aproximadamente iguales a las sumas de los momentos estáticos de todos los rectángulos respecto a los ejes Ox y Oy:

$$M_x \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{y} \quad M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por otro lado, estas sumas son sumas integrales y como las funciones $f^2(x)$ y $xf(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, los límites de estas sumas para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existen y son iguales a las inte-

grales definidas. Por consiguiente,

$$M_x = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \, dx$$

$$\text{y} \quad M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b x f(x) \, dx.$$

Puesto que la masa de todo el trapecio es igual a

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \, dx = S,$$

donde S es el área de todo el trapecio, para hallar las coordenadas del centro de gravedad del trapecio, según la definición del centro de gravedad, es necesario dividir los valores de los momentos estáticos M_x y M_y por el área de todo el trapecio:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b x f(x) \, dx}{S} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \, dx}{S}.$$

Al igual que en el caso centro de gravedad de una curva, se puede obtener para la ordenada y_c del centro de gravedad de un trapecio curvilíneo el siguiente corolario geométrico:

$$2\pi y_c S = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Teniendo en cuenta que $2\pi y_c$ es la longitud de la circunferencia de radio y_c y $\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$, el volumen del cuerpo obtenido por la revolución del trapecio curvilíneo alrededor del eje Ox es válido el siguiente teorema.

Segundo teorema de Guldin. *El volumen del cuerpo de revolución de un trapecio curvilíneo alrededor del eje que no lo corta y está situado en el mismo plano es igual al producto del área de este trapecio por la longitud de la circunferencia descrita con esta revolución por el centro de gravedad del trapecio.*,

○ **Ejemplo 20.** Hallar el centro de gravedad de una onda de la cicloide $x = a \ (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a \ (1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, a condición de que $\rho = 1$ (véase la fig. 190).

Resolución. El volumen del cuerpo obtenido como resultado de la revolución de una onda de la cicloide en torno al eje Ox es igual a

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=5\pi^2a^3.$$

El área de una onda de la cicloide $S=3\pi a^2$ (véase el ejemplo 6). Sea y_c la ordenada del centro de gravedad. Conforme al segundo teorema de Guldin $2\pi y_c\cdot S=V$, de donde $y_c=5a/6$. De la simetría de una onda de la cicloide respecto a la recta $x=\pi a$ se desprende que la abscisa del centro de gravedad $x_c=\pi a$.

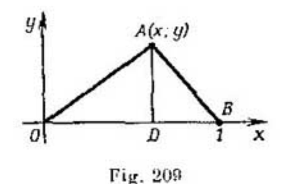


Fig. 209

Ejemplo 21. Hallar el centro de gravedad de una placa triangular homogénea.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy según se muestra en la fig. 209 de una manera tal que su origen esté en uno de los vértices de la placa y el otro vértice tenga las coordenadas (1; 0); supongamos que el tercer vértice tiene las coordenadas $(x;\ y)$.

Determinemos la ordenada del centro de gravedad de la placa, utilizando el segundo teorema de Guldin. Es evidente que el área del triángulo es igual a $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y=y/2$; el volumen del cuerpo obtenido como resultado de la revolución del triángulo OAB en torno al eje Ox es igual a la suma de los volúmenes de los conos obtenidos como resultado de la revolución de los lados OA y AB, respectivamente, y es igual a

$$\frac{1}{3}\pi\,|AD|^2\cdot(|OD|+|DB|)=\frac{1}{3}\pi y^2\cdot 1=\frac{1}{3}\pi y^2.$$

Conforme al segundo teorema de Guldin, $2\pi y_c\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{3}\pi y^2$, de donde $y_c=\frac{y}{3}$.

Así pues, el centro de gravedad de la placa está a una distancia de $y/3$ a partir del lado OB. Análogamente se puede mostrar que dicho centro se encuentra a una distancia igual a $\frac{1}{3}$ partes de alturas respectivas a partir de otros lados del triángulo. Por lo tanto, el centro de gravedad de una placa triangular homogénea se halla en el punto de intersección de las medianas del triángulo. ●

Ejercicio. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un semicírculo que tiene por centro el origen de coordenadas y está en el semiplano superior, a condición de que $\rho=1$. $\left(\textit{Resp.}\ x_c=0,\ \ y_c=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.\right)$

7. Trabajo de una fuerza variable. Supongamos que un punto material se traslada bajo la acción de una fuerza F que está orientada a lo largo del eje Ox y tiene una magnitud variable dependiente de x. Se necesita determinar el trabajo A que la fuerza F realiza al trasladarse el punto material a lo largo del eje Ox del punto $x = a$ al punto $x = b$ $(a < b)$. Se supone que la función $F(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ (fig. 210).

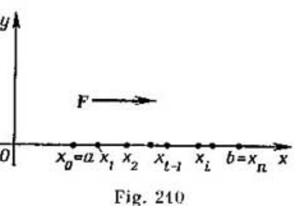


Fig. 210

Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Escojamos en cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ el punto ξ_i. La fuerza que actúa sobre un punto material en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ varía de un punto a otro. No obstante, si la longitud del segmento es pequeña, el valor de la fuerza en los puntos del segmento $[x_{i-1}, x_i]$ poco se distingue de su valor en todo punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ya que $F(x)$ es continua. Por esta razón el trabajo A_i realizado por la fuerza F en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ puede considerarse, aproximadamente, igual al trabajo realizado en el mismo segmento por la fuerza constante $F(\xi_i)$, o sea,

$$A_i \approx F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Razonando análogamente para cada segmento de partición, obtenemos el valor aproximado del trabajo A que la fuerza F realiza en todo el segmento

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por otro lado, la suma dada en el segundo miembro de la igualdad es suma integral para la función $F(x)$. Puesto que la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $F(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por lo tanto,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (16)$$

Ejemplo 22. Determinar el trabajo A necesario para lanzar un cuerpo de masa m desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba a una altura h (fig. 211).

Resolución. Designemos con F la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Sea m_T la masa de la Tierra. Según la ley de Newton

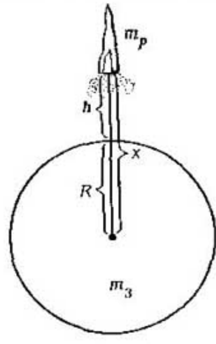


Fig. 211

$$F=G\frac{mm_T}{x^2},$$

donde x es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. Suponiendo $Gmm_T=k$, obtenemos $F(x)=k/x^2$, $R\leqslant x\leqslant h+R$, donde R es el radio de la Tierra. Para $x=R$ la fuerza $F(R)$ es igual al peso del cuerpo $P=mg$, o sea, $\frac{k}{R^2}=P$, de donde $k=PR^2$ y $F(x)=\frac{PR^2}{x^2}$. Así pues, según la fórmula (16) resulta

$$A=\int\limits_R^{R+h}F(x)\,dx=PR^2\int\limits_R^{R+h}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=-PR^2\frac{1}{x}\Big|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

Ejercicio. Una carga eléctrica e_1 colocada en el origen de coordenadas repele otra carga del mismo signo e_2 trasladándola del punto $x=a$ al punto $x=b$ $(a<b)$. Determinar el trabajo A realizado por la fuerza F al trasladar la carga e_2. (*Resp.* $A=$ $=ke_1e_2(1/a-1/b)$.) (*Indicación*: las cargas eléctricas se repelen con una fuerza $F(x)=k\frac{e_1e_2}{x^2}$, donde k es constante; e_1 y e_2, los valores de las cargas; x, la distancia entre ellas.)

De los problemas analizados se deduce que para su resolución fue aplicado el mismo método: el valor aproximado de la magnitud buscada se representaba en forma de la suma integral y luego, pasando al límite, se obtenía el valor exacto en forma de la integral. Con ayuda de este mismo método se puede resolver varios otros problemas de la mecánica, la física y la técnica.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué se llama trapecio curvilíneo?
2. ¿En qué consiste el significado geométrico de la integral definida?
3. ¿Según cuáles fórmulas se calculan las áreas de figuras: a) en coordenadas rectangulares; b) en coordenadas polares; c) en caso de una representación paramétrica de la frontera?
4. ¿Qué es la propiedad de aditividad de un área?
5. Dése la definición del límite de los perímetros de una quebrada para $\mu\to 0$.
6. ¿Qué se llama longitud del arco de una curva?
7. ¿Con qué fórmulas se calcula la longitud del arco de una curva: a) en coordenadas rectangulares; b) representada paramétricamente; c) en coordenadas polares?

8. ¿Qué es la diferencial de un arco? ¿En qué consiste el significado geométrico de la diferencial de un arco?

9. ¿Con qué fórmulas se calcula el área de una superficie de revolución: a) en coordenadas rectangulares; b) en caso de una representación paramétrica de la curva; c) en coordenadas polares?

10. ¿Con qué fórmula se calcula: a) el volumen de un cuerpo con secciones transversales conocidas; b) el volumen de un cuerpo de revolución?

11. ¿Qué son los momentos estáticos de un sistema de puntos materiales respecto a los ejes de coordenadas?

12. ¿Qué se llama centro de gravedad de un sistema de puntos materiales?

13. ¿Con qué fórmulas se calcula el centro de gravedad de una curva: a) representada paramétricamente; b) en coordenadas rectangulares?

14. Enúnciese el primer teorema de Guldin.

15. ¿Con qué fórmulas se calcula el centro de gravedad de un trapecio curvilíneo?

16. Enúnciese el segundo teorema de Guldin.

17. Formúlese el método general de resolución de los problemas con ayuda de la integral definida.

§ 12. Problemas de control

En los problemas 6.1 a 6.3 es necesario calcular las integrales indicadas.

6.1. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$. 6.2. $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

6.3. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$. 6.4. Calcule la integral $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx$ sin encontrar la primitiva de la función subintegral.

En los problemas 6.5 a 6.7 se necesita hallar las áreas de una figura limitada por las líneas indicadas.

6.5. La parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a ella trazadas por los puntos $(0; -3)$ y $(3; 0)$.

6.6. La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y la parábola $y=x^2-\pi x$.

6.7. La línea $y=|x|+1$, las rectas $y=0$, $x=-2$ y $x=1$.

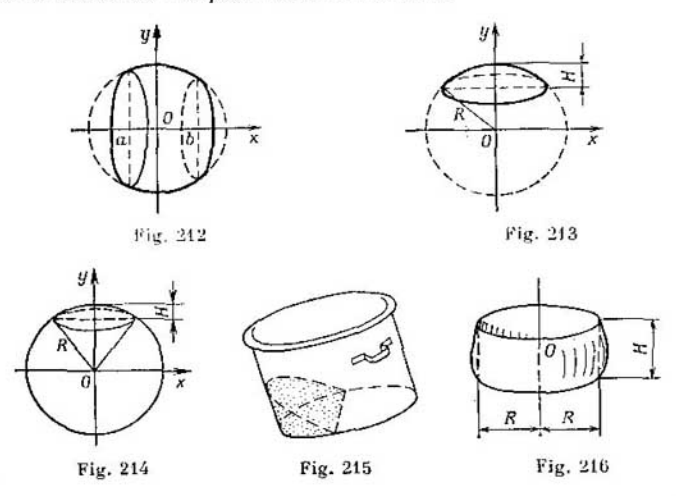
6.8. Se llama *capa esférica* el cuerpo obtenido por la revolución de un trapecio curvilíneo limitado por el arco de la circunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$, las rectas $x=a$ y $x=b$ $(-R<a<b<R)$ y el eje Ox, alrededor del eje Ox (fig. 212) [1]. Hállese el volumen de la capa esférica comprendida en la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ entre los planos $x=2$ y $x=3$.

6.9. Se llama *segmento esférico* el cuerpo obtenido al girar el arco de una circunferencia alrededor del diámetro de circunferencia perpendicular a la cuerda que subtiende el arco. Determínese el volumen de un segmento esférico, conociendo el radio R de la circunferencia y la altura H del segmento, o sea, la longitud del trozo del eje de revolución que está dentro del segmento (fig. 213).

[1]) Hemos llamado zona esférica la superficie de este cuerpo y la hemos buscado en el ejemplo 13 del § 11.

6.10. Se llama *sector esférico* el cuerpo engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de uno de sus radios de frontera. Determine el volumen de un sector esférico, conociendo el radio R de la esfera y la altura H del sector (fig. 214).

6.11. El pequeño Sergio llenó una cacerola cilíndrica de pequeña cantidad de mijo limpio y preguntó a señora Ludmila, su vecina: «¿Cuánta agua hay que echar para que se obtenga una papilla gustosa?» —«Es una cosa muy sencilla —respondió la vecina—. Inclina la cacerola de ese modo; golpea para que el mijo se remueva y cubra una mitad del fondo, exactamente. Ahora marque en la pared de la cacerola un punto próximo al nivel que alcanza el mijo. ¡Hasta este nivel hay que echar precisamente agua!» (fig. 215) —«Pero se puede llenar la cacerola de una cantidad mayor o menor de mijo y las cacerolas suelen ser diferentes: anchas y estrechas» —dudó Sergio. —«No importa, ¡mi método es útil en todo caso!» —respondió la señora Ludmila.



a) Demuéstrese que la señora Ludmila tiene razón: según su receta la relación entre los volúmenes de agua y de mijo resulta igual para toda cacerola cilíndrica.

b) ¿A qué es igual esta relación?

6.12. Un orfebre ha recibido el encargo de producir un anillo de oro de anchura H que tenga la forma de un cuerpo limitado por la esfera con centro O y por la superficie de un cilindro de radio R cuyo eje pase por el punto O (fig. 216). El artífice ha hecho tal anillo, pero ha escogido R demasiado pequeño. ¿Cuánto oro tiene que añadir si se necesita aumentar R m veces, dejando la anchura H de antes (el peso específico del oro se considera conocido)?

> En los problemas 6.13 y 6.14 es necesario hallar: a) el área de la figura limitada por las líneas dadas; b) el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de esta figura alrededor del eje Ox.

6.13. Las parábolas $x = 1 - 3y^2$ y $x = -2y^2$.

6.14. La curva $y = \cos^2 (x/2) - \operatorname{sen}^2 (x/2)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

6.15. Hallar la longitud del arco de una parábola semicúbica $y = x^{3/2}$, donde $x \in [0, 4]$.

6.16. Se prefijan: la parábola $x = y^2$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, donde $a > 0$. Hállese: a) el área de la figura limitada por las curvas dadas; b) su volumen; c) el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución de esta figura alrededor del eje Ox. Calculando el área de la superficie considerar primero $0 < b \leqslant x \leqslant a$, luego tender b a 0.

En los problemas **6.17** y **6.18** se necesita hallar con ayuda de los teoremas de Guldin y partiendo de las consideraciones de simetría los centros de gravedad de los cuerpos materiales indicados.

6.17. El arco de una circunferencia de radio R el cual contrae un ángulo central de 2α.

6.18. El sector circular de ángulo 2α entre los radios de magnitud R que lo limitan.

6.19. Se llama *toro* un cuerpo engendrado por la revolución de un círculo alrededor del eje que no lo interseca. Hállese: a) el volumen del toro; b) el área de la superficie del toro engendrado por la revolución del círculo $(x - 2)^2 + y^2 \leqslant 1$ alrededor del eje Oy.

6.20. Calcular el trabajo A que ha de ser realizado para estirar un muelle en 0,05 m si se sabe que la fuerza que estira el muelle en x m es igual a $F(x) = kx$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad que depende de la elasticidad del muelle y que para estirar el muelle en 0,01 m se necesita una fuerza igual a 1 kgf.

RESPUESTAS, RESOLUCIONES E INDICACIONES PARA LOS PROBLEMAS DE CONTROL

(Son posibles otras resoluciones de problemas, distintas de las aquí citadas)

1.1. Resolución. Puesto que para cada $x \in (0, 1)$ se cumplen las desigualdades $0 < x < 1$, el conjunto dado está acotado. Por eso el número 1 y, por consiguiente, todo número mayor es su cota superior, mientras que el número 0 y todo número menor es su cota inferior.

Más aún, el número 1 es la cota superior exacta del conjunto dado, o sea, $\sup (0, 1) = 1$, ya que para cada $\varepsilon > 0$ siempre habrá $x \in (0, 1)$ tal que se cumpla la desigualdad $x > 1 - \varepsilon$. Efectivamente, sea $\varepsilon = 2$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > -1$; sea $\varepsilon = 1$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > 0$; sea $\varepsilon = 1/2$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > 1/2$, etc. Y esto, según la propiedad de la cota superior exacta, significa que $\sup (0, 1) = 1$.

Análogamente se puede mostrar que $\inf (0, 1) = 0$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.2. Resolución. Admitamos lo inverso, por ejemplo, que el conjunto dado X está acotado superiormente. Entonces, en virtud del teorema 1.1, tiene la cota superior exacta. Designémosla con c, o sea, $\sup X = c$. Conforme a la propiedad de la cota superior exacta para $\varepsilon = 1$ habrá un tal número *entero* $x \in X$ que se cumpla la desigualdad $x > c - 1$. Pero entonces $x + 1 > c$ y como $x + 1 \in X$, esto quiere decir que c no es la cota superior exacta del conjunto X. Por lo tanto, queda obtenida la contradicción que demuestra que el conjunto dado no está acotado superiormente.

De manera análoga se demuestra que el conjunto X no está acotado inferiormente. (Hágase esto por sí mismo.)

1.3. Indicación. El hecho de que el conjunto X no está acotado superiormente se deduce de la afirmación demostrada en el problema 1.2.

1.4. Resolución. Efectivamente, en virtud de la afirmación del problema 1.2 para el número b/a habrá un tal número entero n que $b/a < n$. Este número n es buscado, ya que multiplicando la desigualdad $b/a < n$ por un número positivo a, obtenemos $an > b$, conforme se quería demostrar.

1.5. Resolución. Sea $\sup X = A$, $\sup Y = B$. Se necesita demostrar que $B \leqslant A$. Supongamos lo inverso, o sea, que $B > A$. Entonces, según la propiedad de la cota superior exacta, para cada $\varepsilon > 0$ habrá un número $y \in Y$ tal que $y > B - \varepsilon$. Como $B - A > 0$, tomemos $\varepsilon = B - A$. Resulta $y > B - \varepsilon = B - B + A$, o sea, $y > A$. Pero $y \in Y$ e $Y \subset X$, por lo tanto, $y \in X$. Según la definición de $\sup X$ todo número $y \leqslant A$. Pero admitiendo que $B > A$, se puede hallar un número $y \in X$ tal que $y > A$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que $B \leqslant A$ o $\sup X \geqslant \sup Y$.

Es posible también otra demostración. Como $Y \subset X$, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumplen las desigualdades $x \leqslant \sup X$, $y \leqslant \sup X$ e $y \leqslant \sup Y$. Pero $\sup Y$ es el menor entre los números que acotan el conjunto Y superiormente y $\sup X$ es uno de los números que acotan el conjunto Y superiormente, por consiguiente, $\sup Y \leqslant \sup X$. De modo análogo se demuestra que $\inf Y \geqslant \inf X$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.6. Resolución. Sea $\sup \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = C$, $\sup X = A$, $\sup Y = B$. Conforme a la definición de la cota superior, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumple la desigualdad $C \geqslant z$ o $C \geqslant x + y$. Por otro lado, según la propiedad de la cota superior exacta para cada $\varepsilon > 0$ habrá $x \in X$ e $y \in Y$ tales que se cumplan las desigualdades $x > A - \varepsilon/2$ e $y > B - \varepsilon/2$. De aquí resulta $x + y > A + B - \varepsilon$. Y puesto que $C \geqslant x + y > A + B - \varepsilon$, $C > A + B - \varepsilon$, entonces $C \geqslant A + B$.

Mostremos ahora que $C = A + B$. Efectivamente, tenemos $z = x + y$, $x = z - y$, pero, conforme a la definición de la cota superior, $A \geqslant x = z - y$ o bien $A \geqslant z - y$, de donde $y \geqslant z - A$. Por otro lado, $B \geqslant y \geqslant z - A$, $B \geqslant z - A$ o $B + A \geqslant z$. Según la propiedad de la cota superior exacta, para cada $\varepsilon > 0$ habrá z tal que $z > C - \varepsilon$. Por eso $B + A > C - \varepsilon$, de donde resulta $B + A \geqslant C$. Así pues, $B + A \leqslant C \leqslant B + A$; queda tomar $C = B + A$.

Análogamente se puede demostrar que $\inf \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \inf X + \inf Y$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.7. $x < -1$ o bien $x \geqslant 1$.

Indicación. La igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$.

1.8. $x \geqslant 5$.

Resolución. La igualdad $|x + y| = |x| + |y|$ es válida sólo cuando x e y tienen el mismo signo. Como $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 > 0$ para todos los valores de x, la igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $x - 5 \geqslant 0$, de aquí $x \geqslant 5$.

1.9. $x = -\pi/2 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Resolución. La igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x < 0$. Por esta razón tenemos: $-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 2$ o bien $\operatorname{sen} x = -1$, de donde $x = -\pi/2 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.10. $|x| \geqslant \sqrt{3}$.

Resolución. La igualdad $|x - y| = |x| - |y|$ es válida sólo cuando x e y tienen el mismo signo y $|x| \geqslant |y|$. En el caso dado la igualdad es válida para aquellos valores de x para los cuales $x^4 - 4 \geqslant x^2 + 2$ o bien $x^2 - 2 \geqslant 1$, de donde $|x| \geqslant \sqrt{3}$.

1.11. 1) $x = 0$; 2) $x = 2/5$ y $x = 2$; 3) $x = 1/2$.

1) **Resolución.** Tenemos $|x+4| = \begin{cases} (x+4) & \text{si } x \geqslant -4, \\ -(x+4) & \text{si } x < -4, \end{cases}$

$$|x-4| = \begin{cases} (x-4) & \text{si } x \geqslant 4, \\ -(x-4) & \text{si } x < 4. \end{cases}$$

Por consiguiente, para $x < -4$ resulta $-(4 + x) = -(x - 4)$, de donde $8 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones; para $-4 \leqslant x < 4$ obtenemos $(x + 4) = -(x - 4)$, de donde $x = 0$; para $x \geqslant 4$ tenemos $x + 4 = x - 4$, de donde $8 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones. Ahora bien, $x = 0$ es la solución de la ecuación dada [1]).

2) **Resolución.** Tenemos

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ -(x-1) & \text{si } x < 1, \end{cases} \quad |1-2x| =$$

$$= \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leqslant 1/2, \\ -(1-2x) & \text{si } x > 1/2, \end{cases} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

---

[1]) Aquí hemos utilizado un procedimiento especial: «el método de los intervalos».

Por lo tanto, para $x < 0$ resulta $-(x-1)+1-2x=-2x$, de donde $x=2$, es decir, no hay soluciones, ya que $2 \notin (-\infty, 0)$; para $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ obtenemos $-(x-1)+1-2x=2x$, de donde $x=2/5$ es la solución de la ecuación, ya que $\frac{2}{5} \in [0, 1/2]$; para $1/2 < x < 1$ resulta $-(x-1)-(1-2x)=2x$, de donde $x=0$, es decir, no hay soluciones; para $1 \leqslant x < +\infty$ tenemos $x-1-(1-2x)=2x$, de donde $x=2$ es la solución de la ecuación. Así pues, $x=2/5$ y $x=2$ son las soluciones de la ecuación dada.

3) **Resolución.** Tenemos: a) $|3-2x|-1=2|x|$; b) $|3-2x|-1=-2|x|$.

a)

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x \text{ si } x \leqslant 3/2, \\ -(3-2x) \text{ si } x > 3/2, \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo consiguiente, para $x < 0$ resulta $3-2x-1=-2x$, de donde $2=0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones; para $0 \leqslant x \leqslant 3/2$ obtenemos $3-2x-1=2x$, de donde $x=1/2$ es la solución de la ecuación; para $3/2 < x < +\infty$ tenemos $-3+2x-1=2x$, de donde $4=0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones.

No es difícil verificar que en el caso b) la igualdad no tiene una solución. Por lo tanto, $x=1/2$ es la solución de la ecuación dada.

1.12. $x < 0$ o bien $0 < x < 3$.

Resolución. La desigualdad $|a-b| > |a|-|b|$ es válida cuando: 1) los números a y b son de signos opuestos; 2) $|a| < |b|$. En el caso 1), ya que $x^2 > 0$, la desigualdad tiene lugar para los valores de x para los cuales $3x < 0$, o sea, para $x < 0$. En el caso 2) la desigualdad se cumple para aquellos valores de x para los cuales $x^2 < 3x$ o bien $x^2-3x < 0$, $x(x-3) < 0$. Son posibles ambos casos: ora $\begin{cases} x<0 \\ x-3>0, \end{cases}$ ora $\begin{cases} x>0, \\ x-3<0. \end{cases}$ El primer sistema no tiene soluciones, el segundo tiene una solución $0 < x < 3$. De esta manera, obtenemos la respuesta $x < 0$ o bien $0 < x < 3$.

1.13. $x < -4$ o bien $x > 4$.

1.14. Resolución. Tenemos: 1) para $n=1$ la afirmación es justa, ya que $4^1=4>1=1^2$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto n, demostremos que $4^{n+1} > (n+1)^2$. Efectivamente, puesto que $4^{n+1}=4\cdot 4^n > 4n^2$ y $n^2 \geqslant n$ y $n^2 \geqslant 1$, entonces $4n^2 \geqslant n^2+2n+1=(n+1)^2$. Finalmente obtenemos $4^{n+1} > (n+1)^2$, lo que se quería demostrar.

1.15. Resolución. Tenemos: 1) para $n=4$ la afirmación es justa, puesto que $4!=24>16=2^4$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto $n>4$, demostremos que $(n+1)! > 2^{n+1}$. Efectivamente, $(n+1)! = n!\,(n+1) > 2^n(n+1) > 2^n\cdot 2 = 2^{n+1}$, ya que $n+1>2$ para $n \geqslant 4$. Finalmente resulta $(n+1)! > 2^{n+1}$, lo que se quería demostrar.

1.16. Resolución. Tenemos: 1) para $n=2$ la afirmación es justa. En efecto, $\sqrt{2} < 1+1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ o bien $2 < \sqrt{2}+1 < 4$. Esto es justo, puesto que $1 < \sqrt{2} < 2$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto $n > 2$, demostremos que

$$\sqrt{n+1} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Para demostrar la validez de la desigualdad

$$\sqrt{n+1} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

basta convencerse de que

$$\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Efectivamente, esto es justo, ya que

$$\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longleftrightarrow^{1)} n+1<\sqrt{n(n+1)}+1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow n^2<(\sqrt{n(n+1)})^2=n^2+n \Longleftrightarrow 0<n,$$

lo que es evidente para $n \geqslant 2$. Análogamente, para demostrar la desigualdad

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$$

basta cerciorarse de que

$$2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}.$$

Esta desigualdad es justa, puesto que

$$2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1} \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}+1<$$
$$<2(n+1) \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1 \Longleftrightarrow 4n^2+4n<4n^2+4n+1 \Longleftrightarrow 0<1$$

Por lo tanto, la afirmación dada queda demostrada.

1.17. $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

Resolución. Designemos la suma buscada con S_n. Entonces

$$S_n=1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1^2+1}{2}+\frac{2^2+2}{2}+\ldots+\frac{n^2+n}{2}=$$
$$=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+1+2+\ldots+n}{2}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Observación. La fórmula $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ queda demostrada en el § 6 (véase el ejemplo 3) y Ud debía demostrar por sí mismo la fórmula $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1.18. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$

[1)] El signo $\Longleftrightarrow$ designa la equivalencia. Por ejemplo, la notación $A \Longleftrightarrow B$ significa que de A se desprende B y, viceversa, de B se desprende A.

Resolución. Designemos la suma buscada con S_n y representemos $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ en la forma $\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$. Entonces

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\ldots-\frac{1}{2(2n-1)}+$$
$$+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Para convencerse de que la suma queda determinada correctamente hagamos uso del método de inducción matemática. Tenemos:

1) para $n=1$ la afirmación es justa, ya que

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6};$$

2) admitamos que para cierto n es justa la igualdad

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)};$$

entonces

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-$$
$$-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3-2}{2(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+3)}.$$

De esta manera, por el método de inducción matemática hemos confirmado la validez de la fórmula buscada $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$.

2.8. c) $|b|$; $|a|$. **Indicación.** Hágase uso de la fórmula F — 3 [1]).

2.9. 1) La longitud del lado del cuadrado $a=\sqrt{17}$ (unid.); 2) $S_{ABCD}=17$ (unid. [2]); 3) los puntos medios de los lados del cuadrado son: M (3,5; 3) (el punto medio del lado AB); N (1; 4; 5) (el punto medio del lado BC); K (−0,5; 2) (el punto medio del lado CD); L (2; 0,5) (el punto medio del lado AD).

Resolución. 1) La longitud de un lado del cuadrado:

$$a=|AD|=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}\ \text{(unid)}.$$

2) El área del cuadrado $S_{ABCD}=a^2=17$ (unid. [2]).

3) Encontramos las coordenadas de los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA según la fórmula para las coordenadas del punto medio del segmento (véase el corolario citado en la pág. 42). Sea M $(x_M;\ y_M)\in[AB]$, $|AM|=|MB|$. Entonces el punto M divide el segmento AB en la razón $\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}=$

[1]) Aquí y en adelante en este capítulo la alegación «F — 3» designa la fórmula 3 del § 5. Análogamente se designan otras fórmulas de este párrafo: F — 4, F — 5, etc.

$= 1$, por esta razón conforme a F — 5,

$$x_M = \frac{3+4}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Análogamente obtenemos las demás respuestas.

2.10. $x_c = 2$; $y_c = 1$.

Resolución. El centro de gravedad de la placa que tiene la forma de un triángulo está en el punto de intersección de las medianas del triángulo (fig. 217). Sea D el punto medio del lado BC del triángulo ABC. Entonces el punto D divide el segmento BC en la razón $\lambda = 1$, por eso, conforme a F — 5, las coordenadas del punto D son tales:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

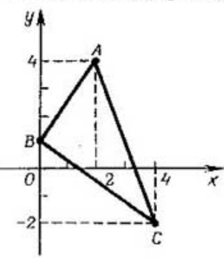


Fig. 217

Las medianas del triángulo se intersecan en el mismo punto que divide cada una de ellas en la razón $\lambda = 1/2$. Designando con x_C e y_C las coordenadas del centro de gravedad de la placa buscada y empleando la fórmula F — 5, obtenemos

$$x_c = \frac{x_D + \frac{1}{2}x_A}{1+1/2} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{3/2} = \frac{6}{3} = 2;$$

$$y_c = \frac{y_D + \frac{1}{2}y_A}{1+1/2} = \frac{-1/2+\frac{1}{2}\cdot 4}{3/2} = \frac{3}{3} = 1.$$

Por lo tanto, $x_c = 2$; $y_c = 1$.

2.11. Los vértices tienen las coordenadas $M(0; -3)$; $N(-4; 5)$ y $K(8; 1)$.

Resolución. Sean A el punto medio del lado MN; B, el punto medio del lado NK; C el punto medio del lado KM en el triángulo MNK. Entonces, conforme a F — 5 (para $\lambda = 1$),

$$x_A = \frac{x_M + x_N}{2}; \quad x_B = \frac{x_N + x_K}{2}; \quad x_C = \frac{x_K + x_M}{2};$$

$$y_A = \frac{y_M + y_N}{2}; \quad y_B = \frac{y_N + y_K}{2}; \quad y_C = \frac{y_K + y_M}{2}.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las coordenadas de los puntos A, B y C, llegamos a dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_M + x_N = -4, & (1) \\ x_N + x_K = 4, & (2) \\ x_K + x_M = 8, & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_M + y_N = 2, \\ y_N + y_K = 6, \\ y_K + y_M = -2. \end{cases}$$

Sumando término a término las ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos $4 = x_M + x_N + x_K$. Sustrayendo sucesivamente de la última ecuación las ecuaciones 1), (2) y (3), encontramos: $x_K = 8$, $x_M = 0$, $x_N = -4$. Ejecutando las opera-

ciones análogas con las ecuaciones del segundo sistema, hallamos: $y_K = 1$, $y_M = -3$, $y_N = 5$.

2.12. El punto C debe tener las coordenadas $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.

Resolución. Sea O el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$: entonces este punto es punto medio de las diagonales. Puesto que O es el punto medio del segmento BD, conforme a F — 5 ($\lambda = 1$) (fig. 218)

$$x_0 = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}\ (1) \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}\ (2).$$

Como O es el punto medio del segmento AC, análogamente encontramos

$$x_0 = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

De aquí resulta $x_C = 2x_0 - x_A$ e $y_C = 2y_0 - y_A$. Sustituyendo en estas igualdades los valores de x_0 e y_0 encontrados en (1) y (2), obtenemos la respuesta.

Observación. Este problema se resuelve más fácilmente por la composición de los vectores con las coordenadas dadas.

2.13. C (32; 0) o bien C (—8; 0).

Resolución. Sea $C\ (x_C;\ y_C)$ el vértice buscado. Según los datos, $y_C = 0$. De acuerdo con la fórmula del área del triángulo F — 4 tenemos

$$10 = \frac{1}{2} \left| (-2-5)(0-1) - (x_C - 5)(2-1) \right|$$

de donde $|12 - x_C| = 20$. Por lo tanto, $12 - x_C = 20$ o bien $12 - x_C = -20$, por eso $x_C = -8$ o bien $x_C = 32$.

2.14. El área del cuadrilátero es igual a 13 (unid.²).

Resolución. Puesto que (fig. 219) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ y según la fórmula F — 4, $S_{ABC} = 13/2$, $S_{ACD} = 13/2$, entonces $S_{ABCD} = 13$ (unid.²).

2.15. Las coordenadas rectangulares del punto son iguales a $(2 + 5\sqrt{3};\ 8)$.

Resolución. Como en el triángulo rectángulo $O'AB$ (fig. 220) $\widehat{AO'B} = 30°$, entonces $|AB| = \frac{1}{2} |O'A| = 5$, por esta razón

$$|O'B| = \sqrt{|O'A|^2 - |AB|^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Luego, } x_A = 2 + |O'B| = 2 + 5\sqrt{3}, \quad y_A = 3 + |AB| = 3 + 5 = 8.$$

2.16. La distancia es igual a $\sqrt{34}$ (unid. de long.).

Resolución. Sea O el polo, A y B los puntos dados (fig. 221). El triángulo AOB es rectangular, por eso

$$|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

2.17. Véanse las figs. 222 a 230.

Indicaciones y resoluciones. 2) En el caso de $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ la ecuación $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$ toma la forma $1 = 1$ y en el caso de $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ toma la siguiente forma: $-1 = -1$, por consiguiente, todos los puntos que están en los cuadrantes I y III (sin fronteras, ya que $x \neq 0$, $y \neq 0$) pertenecen al conjunto buscado. Si x e y tienen signos opuestos (o sea para los puntos de los cuadrantes II y IV), obtenemos la igualdad incorrecta $1 = -1$, por lo tanto, en los cuadrantes II y IV no hay puntos del conjunto buscado (fig. 225).

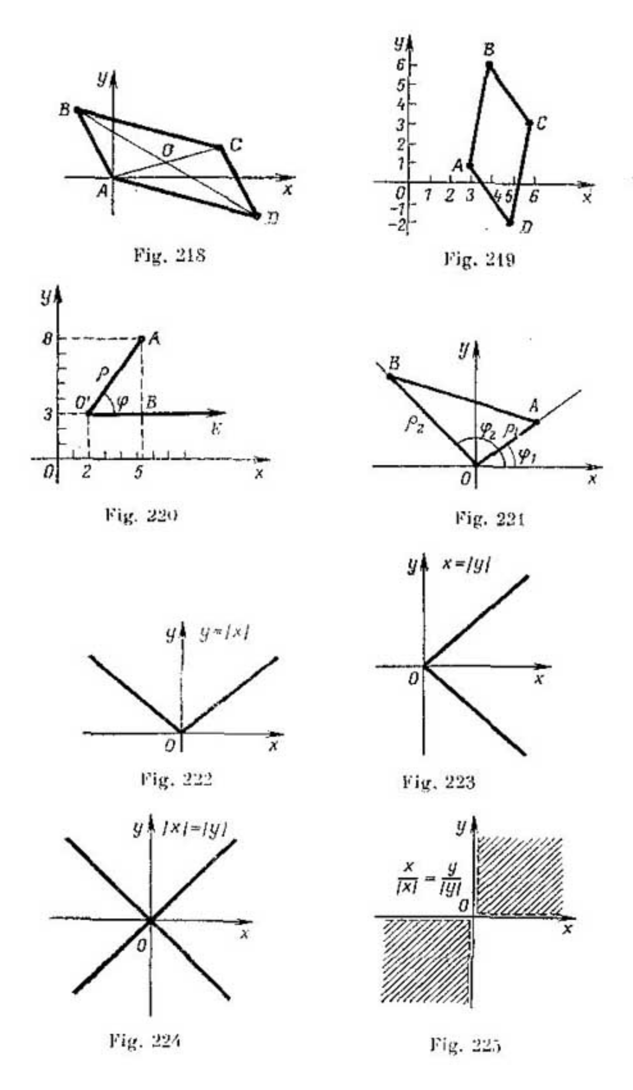


Fig. 218

Fig. 219

Fig. 220

Fig. 221

Fig. 222

Fig. 223

Fig. 224

Fig. 225

4) $(x-y)(x-2y)=0 \iff \begin{cases} x-y=0, \\ x-2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x, \\ y=x/2, \end{cases}$ de donde obtenemos que de conjunto buscado sirve la unión de las rectas $y = x$ e $y = x/2$ (fig. 226).

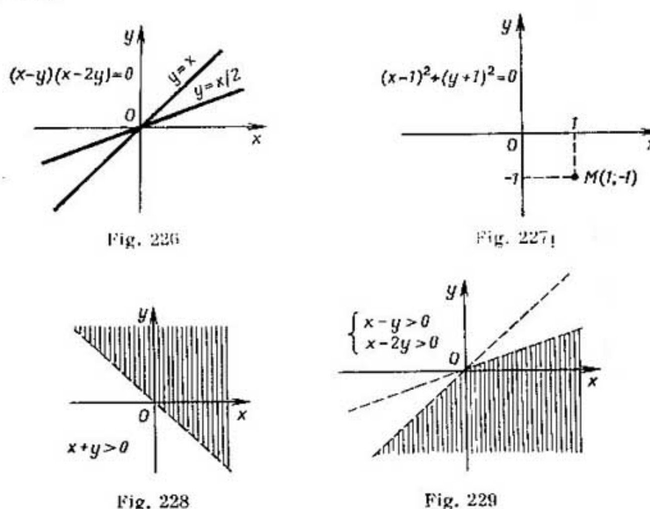


Fig. 226 Fig. 227

Fig. 228 Fig. 229

5) La suma de los cuadrados puede ser igual a cero sólo cuando cada sumando es igual a cero, por consiguiente,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0 \iff \begin{cases} x-1=0, \\ y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$$

o sea, el conjunto buscado es el punto M (1; —1) (fig. 227).

6) $x+y>0 \iff y>-x$, de donde se desprende que al conjunto buscado pertenecen todos los puntos que estén «más arriba» que la recta $y = -x$ (fig. 228).

9) $\begin{cases} x-y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<x, \\ y<x/2 \end{cases}$ por eso al conjunto buscado pertenecen los puntos que son la intersección de los semiplanos $y < x$ e $y < x/2$ (fig. 229).

10) $(x-y)(x-2y)>0$.

El caso de $\begin{cases} x-y>0, \\ x-2y>0 \end{cases}$ está examinado en el problema 9); análogamente se considera el caso de $\begin{cases} x-y<0, \\ x-2y<0, \end{cases}$ o sea, el conjunto buscado es un par de ángulos verticales (fig. 230) sin fronteras.

2.18. a) $y = 0$; b) $y = x + 10$; c) $|x| = 2$.

Indicaciones y resoluciones. a) El mismo punto A (1; 0) está en el eje de abscisas, $y = 0$.

b) La ecuación de la recta paralela a la recta $y = x$ tiene la forma $y = x + b$, donde b es un número constante. El punto B $(-3;\ 7)$ se halla en esta recta, por esta razón $7 = -3 + b$, de donde $b = 10$. Así pues, la recta buscada tiene la ecuación $y = x + 10$.

c) El conjunto de los puntos que se encuentran a la distancia 2 a partir del eje Oy es un par de rectas que son paralelas al eje Oy y pasan por los puntos $(-2;\ 0)$ y $(2;\ 0)$. Las ecuaciones de estas rectas son $x = -2$ o $x = 2$.

2.19. a) $(y-3x)(y-x+3)=0$; b) $(y-x)[(x+1)^2+(y-2)^2]=0$; c) $y \geqslant x$; d) $0<y<1$; e) $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<y<1. \end{cases}$

2.20. Resolución. Utilizando F — 9, escribamos la ecuación de la recta (AB)[1] $\frac{y+6}{400+6}=\frac{x-3}{-200-3}$, de donde $y = -2x$. Las coordenadas del punto C satisfacen la ecuación de la recta (AB). En efecto, $-2000 = -2\cdot 1000$. Por lo tanto, $C \in (AB)$, o sea, los puntos A, B y C están sobre la misma recta.

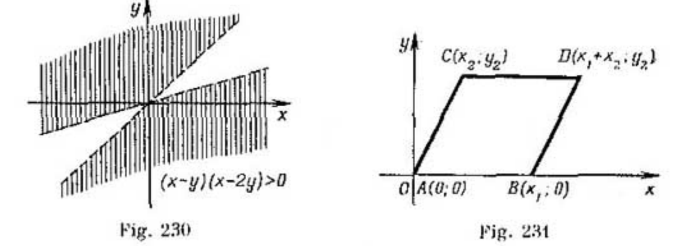


Fig. 230 Fig. 231

2.22. Resolución. Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas con el origen situado en el vértice A del paralelogramo y con el eje de abscisas orientado a lo largo de la recta (AB) del punto A al punto B (fig. 231). Escribamos las coordenadas de los vértices del paralelogramo: A $(0;\ 0)$, B $(x_1;\ 0)$, C $(x_2;\ y_2)$, D $(x_1+x_2;\ y_2)$ (véase el problema 12). Utilizando la fórmula F — 3, determinemos las longitudes de los lados del paralelogramo y de sus diagonales:

$$|AC| = \sqrt{(x_2-0)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2};$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{x_1^2};$$

$$|BD| = |AC| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}; \quad |CD| = |AB| = \sqrt{x_1^2};$$

$$|AD| = \sqrt{(x_1+x_2-0)^2+(x_2-0)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2+y_2^2};$$

$$|CB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+y_2^2}.$$

Ahora se puede comprobar que la suma de los cuadrados de las longitudes de todos los lados del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales. En efecto,

$$|AC|^2 + |AB|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 =$$
$$= (x_2^2 + y_2^2) + x_1^2 + (x_2^2 + y_2^2) + x_1^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2;$$
$$|AD|^2 + |CB|^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_2^2) +$$
$$+ (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2.$$

[1]) La notación (AB) designa la recta que pasa por los puntos A y B.

2.23. a) El punto N no está sobre la circunferencia dada.

Resolución. Escribamos la ecuación de la circunferencia dada (véase F — 13): $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Sustituyamos en ella las coordenadas del punto. Tenemos $(-1+4{,}1)^2+(+2+1{,}9)^2=25$. Suprimiendo los paréntesis, obtenemos la igualdad incorrecta $24{,}82=25$.

2.24. $a=1$ o bien $a=-5$.

Resolución. Utilizando la fórmula F — 13, escribamos la ecuación de la circunferencia dada $(x+2)^2+(y-3)^2=25$. Puesto que el punto A $(a;\ -1)$ está en la circunferencia dada, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la circunferencia, o sea,

$$(a+2)^2+(-1-3)^2=25.$$

Resolviendo la última ecuación, obtenemos dos valores de a: $a_1=1$, $a_2=-5$.

2.25. (AB): $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; (BC): $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; (CD): $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$; (AD): $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

Resolución. Determinemos las coordenadas de los puntos B y D:

$$|OB|=|AO|\operatorname{tg}60°,\quad |AO|=1,\ |OB|=1\cdot\operatorname{tg}60°=\sqrt{3};$$

$$|OD|=|OB|=\sqrt{3};\ B(0;\ \sqrt{3}),\ D(0;\ -\sqrt{3}).$$

Según la fórmula F — 9 escribamos las ecuaciones de las rectas (AB), (BC), (CD) y (AD).

$$(AB):\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\quad -\sqrt{3}x+y=\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x+\sqrt{3};$$

$$(AD):\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\quad y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(CD):\ \frac{x}{1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ -\sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(BC):\ \frac{x}{1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}+y=\sqrt{3};\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$$

2.26. $y=x-5$.

Resolución. La bisectriz de los cuadrantes I y III tiene la ecuación $y=x$. La recta buscada es, según los datos, paralela a esta bisectriz, por eso la ecuación de la recta tiene la forma $y=x+b$. Teniendo en cuenta que el punto A $(0;\ -5)$ está sobre la recta $y=x+b$, determinemos el valor de b: $-5=0+b$; $b=-5$. Por lo tanto, la ecuación de la recta buscada tiene la forma $y=x-5$.

2.27. a) $y=2x+2$.

Resolución. Puesto que la recta buscada es paralela a la recta $y=2x+1$, su ecuación tiene la forma $y=2x+b$. Teniendo en cuenta que el punto M $(0;\ 2)$ pertenece a la recta buscada, encontramos el valor de b: $2=2\cdot0+b$; $b=2$. Así pues, la recta buscada tiene la ecuación $y=2x+2$.

2.28. 1) La ecuación de la altura AD $y=2x+6$; 2) la longitud de la altura AD es igual a $12/\sqrt{5}$ (unid.); 3) $S_{AOB}=12$ (unid.²).

Resolución. Determinemos las abscisas de los puntos A y B. Sustituyendo en la ecuación $2x+y-6=0$ las ordenadas y_A e y_B, obtenemos $2x+6-6=0$, $2x-2-6=0$, de donde $x_A=0$ y $x_B=4$ (fig. 232). Utilizando la fórmula F—9, escribamos la ecuación de la recta (OB); $\frac{y}{-2}=\frac{x}{4}$ o bien $y=-\frac{1}{2}x$. Luego, en virtud de la fórmula F — 7, escribamos la ecuación de la

recta (AD): $y - 6 = k(x - 0)$, $y = kx + 6$. Puesto que, según los datos, la recta (AD) es perpendicular a la recta (BD), conforme a F — 10 b) k en la ecuación de la recta (AD) es igual a 2. Por consiguiente, la ecuación de la altura buscada AD tiene la forma $y = 2x + 6$. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = -1/2x, \\ y = 2x + 6, \end{cases}$ encontramos las coordenadas del punto D: $x_D = -12/5$, $y_D = 6/5$. Según la fórmula F — 3 $|AD| = 12\sqrt{5}$ y según la fórmula F — 4 $S_{AOB} = 12$ (unid.²).

2.29. $2x + 7y - 5 = 0$.

Resolución. Notemos que el punto A $(-1; 1)$ pertenece a la recta $x + 2y - 1 = 0$ (fig. 233).

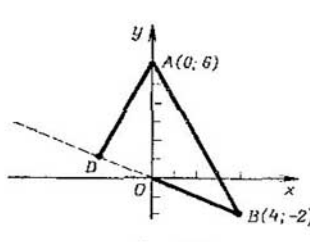


Fig. 232

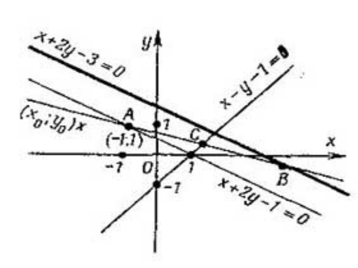


Fig. 233

1) Supongamos que la recta buscada corta la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto B $(x_0; y_0)$. Entonces $x_0 + 2y_0 - 3 = 0$.

2) Las coordenadas $(x_C; y_C)$ del punto medio C del segmento AB pueden ser determinadas mediante la fórmula F — 5 (para $\lambda = 1$):

$$x_C = \frac{-1 + x_0}{2}, \quad y_C = \frac{1 + y_0}{2}.$$

El punto C pertenece a la recta $x - y - 1 = 0$ y, por consiguiente, $x_C - y_C - 1 = 0$ o bien $\frac{-1 + x_0}{2} - \frac{1 + y_0}{2} - 1 = 0$, o sea, $x_0 - y_0 = 4$.

3) Las coordenadas $(x_0; y_0)$ del punto B se obtienen del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = 3, \\ x_0 - y_0 = 4, \end{cases}$$

de donde $x_0 = 11/3$, $y_0 = -1/3$.

4) La ecuación de la recta buscada (AB), donde A $(-1; 1)$ y B $(11/3; -1/3)$, se encuentra según la fórmula F — 7:

$$\frac{x + 1}{11/3 + 1} = \frac{y - 1}{-1/3 - 1} \quad \text{o bien} \quad 2x + 7y - 5 = 0.$$

2.30. $x - 7y + 6 = 0$ y $7x + y + 4 = 0$.

Resolución. Según los datos es necesario hallar el conjunto de todos los puntos M $(x; y)$ equidistantes de las rectas L_1 (la ecuación $3x + 4y - 1 = 0$) y L_2 (la ecuación $4x - 3y + 5 = 0$), o sea, tales que la distancia d_1 del punto M $(x; y)$ a la recta L_1 es igual a la distancia d_2 del punto M $(x; y)$ a la recta

L_2 $(d_1 = d_2)$. Conforme a F — 11,

$$d_1 = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}}, \quad d_2 = \frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{16+9}}.$$

Por lo tanto, el conjunto buscado de los puntos $M(x; y)$ se prefija mediante la ecuación

$$\frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{25}}, \text{ o sea,}$$
$$|4x-3y+5| = |3x+4y-1|.$$

La última ecuación es equivalente a las dos ecuaciones siguientes: $4x - 3y + 5 = 3x + 4y - 1$ o bien $4x - 3y + 5 = -3x - 4y + 1$, o sea, $x - 7y + 6 = 0$ o bien $7x + y + 4 = 0$.

2.31. Para todos los valores de a. El conjunto de los puntos M es una recta perpendicular al segmento AB.

Resolución. Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas con el centro situado en el punto medio del segmento AB y con el eje de abscisas orientado del punto A al punto B (fig. 234). Sea $|AB| = d$, entonces tenemos $A = (-d/2; 0)$, $B(d/2; 0)$. Sea $M(x; y)$ el punto del conjunto buscado. Según la fórmula F — 3,

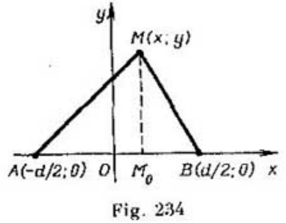


Fig. 234

$$|AM|^2 = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2,$$
$$|BM|^2 = \left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2,$$

de donde $|AM|^2 - |BM|^2 = 2xd$. Por otro lado, según los datos $|AM|^2 - |BM|^2 = a$ y de este modo el conjunto buscado se define por la ecuación $2xd = a$. Es evidente que esta recta es perpendicular al eje de abscisas y lo corta en el punto que tiene por coordenadas $(a/2d; 0)$.

2.32. $(0; 1)$ o bien $(3/5; -4/5)$.

Resolución. El punto buscado $A(x_0; y_0)$ se encuentra en la circunferencia dada, por esta razón las coordenadas están ligadas por la relación $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Además, según los datos, el punto $A(x_0; y_0)$ es equidistante de los puntos $(1; 3)$ y $(-2; 2)$; por eso, según F — 3,

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 3)^2 = (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 2)^2.$$

De esta manera, las coordenadas del punto $A(x_0; y_0)$ pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=1, \\ (x_0-1)^2+(y_0-3)^2=(x_0+2)^2+(y_0-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2=1, \\ y_0=1-3x_0, \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0, \\ y_0=1 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x_0=3/5, \\ y_0=-4/5. \end{cases}$$

2.33. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Resolución. Notemos que puesto que $1^2 + 2^2 = 5$ es una igualdad correcta, el punto $A(1; 2)$ está en la circunferencia dada. Según F — 9, la recta (OA) tiene la ecuación $y = 2x$.

La tangente buscada es perpendicular al radio de la circunferencia trazado al punto de tangencia A, o sea, a la recta (OA). Por esta razón, según F — 10 b),

el coeficiente angular de la tangente buscada es igual a $(-1/2)$ y, por consiguiente, su ecuación tiene la forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Para determinar b hagamos uso del hecho de que el punto A (1; 2) pertenece a la tangente, es decir, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la tangente: $2 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + b$. De aquí $b = \frac{5}{2}$.

Así pues, la ecuación de la tangente a la circunferencia dada en el punto A (1; 2) tiene la forma $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

2.34. $y = \frac{a}{b}x$.

Resolución. Dos puntos de intersección de las dos circunferencias dadas satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ x^2 + y^2 = 2by \end{cases}$$

y, por consiguiente, la condición de $2ax = 2by$, o sea, están sobre la recta $ax = by$. Notemos que para $a \neq 0$ y $b \neq 0$ el sistema tiene dos soluciones (0; 0) y $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$, por eso las circunferencias tienen una cuerda común.

2.35. $x + y - 3 - 3\sqrt{2} = 0$ y $x + y - 3 + 3\sqrt{2} = 0$.

Resolución. Reduzcamos las ecuaciones dadas a la forma canónica

$$(x^2 + y^2 = 6x) \Longleftrightarrow ((x-3)^2 + y^2 = 3^2) \text{ y } (x^2 + y^2 = 6y) \Longleftrightarrow (x^2 + (y-3)^2 = 3^2).$$

Las circunferencias tienen radios iguales, por lo tanto, si se traza la recta por sus centros, las tangentes comunes serán paralelas a esta recta y alejadas de ella a una distancia igual al radio (fig. 235). La ecuación de la recta que pasa por los centros O_1 (3; 0) y O_2 (0; 3) es la siguiente:

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{3-0} \Longleftrightarrow x + y - 3 = 0.$$

Por consiguiente, las tangentes buscadas son conjunto de los puntos $(x; y)$ alejados a partir de la recta $x + y - 3 = 0$ a una distancia igual a 3. Según F — 11,

$$\frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}} = 3,$$

de donde obtenemos la respuesta.

Fig. 235

2.36. $y = \frac{1}{4}x^2$.

Resolución. La parábola pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje Oy, por esta razón, según F — 16, la ecuación de la misma tiene la forma $x^2 = 2py$. Teniendo en cuenta que el punto (6; 9) pertenece a la parábola, encontramos el valor de p: $6^2 = 2p9$, $p = 2$. De suerte que la parábola buscada tiene la ecuación $x^2 = 4y$ o bien $y = \frac{1}{4}x^2$.

2.37. $\frac{x^2}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1$.

Resolución. Las ordenadas y_1 de los puntos de la curva obtenida son dos veces menor que las ordenadas y de los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=36$ con las mismas abscisas, o sea, $y_1=\frac{1}{2}y$, de donde $y=2y_1$. Por eso la ecuación de la nueva curva tiene la forma

$$x^2+(2y_1)^2=36 \iff \frac{x^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1.$$

La curva obtenida es elipse.

2.38. $a=\sqrt{10}$; $b=\sqrt{6}$.

Resolución. Transformemos la ecuación dada, reduciéndola a la forma canónica

$$3x^2+5y^2-30=0 \iff \frac{3x^2}{30}+\frac{5y^2}{30}=1 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1.$$

Por lo tanto, el semieje mayor de la elipse $a=\sqrt{10}$, el semieje menor $b=\sqrt{6}$.

2.39. $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

Resolución. La ecuación de la elipse simétrica respecto a los ejes Ox y Oy es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Teniendo en cuenta que los puntos (1; 4) y (7; 2) están en la elipse, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1, \\ \frac{49}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $a=\sqrt{65}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{65}$. Sustituyendo los valores encontrados de a y b en la ecuación general de la elipse, obtenemos $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

2.40. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Resolución. La elipse dada tiene los semiejes $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$ y los focos en los puntos $F_1(c;\,0)$ y $F_2(-c;\,0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. La hipérbola buscada tiene los focos en los puntos $F_1'(c_1;\,0)$ y $F_2'(-c;\,0)$, donde $c_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}$. Según los datos, $c_1=a$ y $a_1=c$. Por eso tenemos $a=\sqrt{c^2-b_1^2}$, de donde

$$a^2=c^2-b_1^2 \iff a^2=(a^2-b^2)-b_1^2 \iff b^2=b_1^2 \iff b_1=b.$$

Así pues, la ecuación de la hipérbola buscada

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1 \iff \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1.$$

2.41. $2x-5y+19=0$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la circunferencia a la forma canónica:

$$x^2+y^2+4x-6y-17=0 \iff (x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{30})^2.$$

De esta manera, el centro de la circunferencia está en el punto (—2; 3) y, por lo tanto, la recta buscada (el diámetro de la circunferencia) pasa por este punto.

La recta buscada es perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$, o sea, a la recta $y = -\frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$, por eso, según F — 10 b), el coeficiente angular de la recta buscada es igual a 2/5. De suerte que la ecuación de esta recta tiene la forma $y = \frac{2}{5}x + b$. El valor de b se encuentra utilizando el hecho de que el punto (—2; 3) pertenece a la recta buscada: $3 = \frac{2}{5}\cdot(-2) + b$, de donde $b = \frac{19}{5}$. Por lo tanto, la ecuación del diámetro $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$ o bien $2x - 5y + 19 = 0$.

2.42. a) 7.

Resolución. La circunferencia dada $x^2 + y^2 = 9$ tiene por centro el origen de coordenadas O (0, 0) y el radio igual a 3. Unamos el punto M_0 con el origen

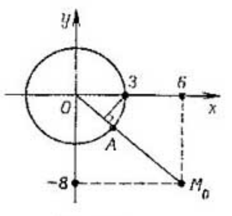


Fig. 236

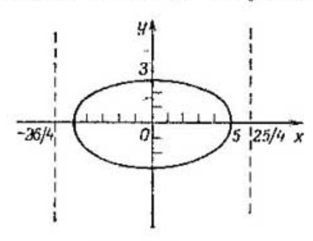


Fig. 237

de coordenadas. Supongamos que el segmento M_0O corta a la circunferencia dada en el punto A (fig. 236). Entonces $|M_0A|$ es la distancia buscada.

Determinemos $|M_0A|$. Teniendo en cuenta que $|OA| = 3$, resulta $|M_0A| = |M_0O| - 3$, o sea, $|M_0A| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} - 3 = 7$.

2.43. a) Corta.

Resolución. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3, \\ x(5x - 11) = 0. \end{cases}$$

Resulta $x = 0$, $y = -3$ y $x = 11/5$, $y = 7/5$. Así pues, la circunferencia dada se interseca con la recta dada en dos puntos: A_1 (0; —3) y A_2 (11/5; 7/5).

2.44. a) $a = 5$, $b = 3$; b) F_1 (—4; 0), F_2 (4; 0); c) $\varepsilon = 4/5$; d) $x = -25/4$ y $x = 25/4$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la elipse a la forma canónica

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

a) Los semiejes de la elipse $a = 5$, $b = 3$ (fig. 237).

b) Las coordenadas de los focos F_1 (—c; 0), F_2 (c; 0), o sea, F_1 (—4; 0), F_2 (4; 0), ya que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

c) La excentricidad: $\varepsilon = c/a$, o sea, $\varepsilon = 4/5$.

d) Las ecuaciones de las directrices $x = -a/\varepsilon$ y $x = a/\varepsilon$, o sea, $x = -25/4$ y $x = 25/4$.

2.45. a) Corta.
Resolución. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3. \\ x(73x-192)=0. \end{cases}$$

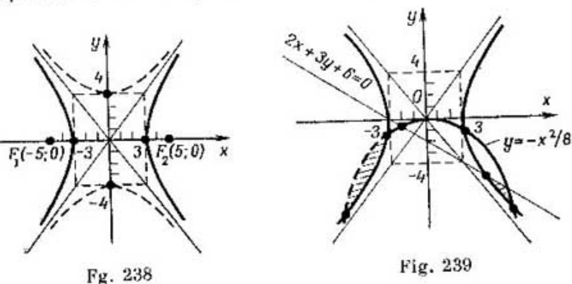
Resulta $x=0$, $y=-3$ y $x=192/73$, $y=165/73$. De suerte que la recta dada corta esta elipse en dos puntos: $B_1(0;\ -3)$ y $B_2(192/73;\ 165/73)$.

2.46. a) $a=3$, $b=4$; b) $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$; c) $\varepsilon=5/3$; d) $y=\dfrac{4}{3}x$ e $y=-\dfrac{4}{3}x$; e) $x=-\dfrac{9}{5}$ y $x=\dfrac{9}{5}$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$16x^2-9y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1.$$

a) Los semiejes de la hipérbola: $a=3$, $b=4$ (fig. 238).
b) Las coordenadas de los focos: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, ya que $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.
c) La excentricidad: $\varepsilon=c/a$, o sea, $\varepsilon=5/3$.
d) La ecuación de las asíntotas: $y=\dfrac{b}{a}x$ e $y=-\dfrac{b}{a}x$, o sea, $y=\dfrac{4}{3}x$ e $y=-\dfrac{4}{3}x$.
e) Las ecuaciones de las directrices: $x=-a/\varepsilon$ y $x=a/\varepsilon$, o sea, $x=-9/5$ y $x=9/5$.
La hipérbola dada está representada en la fig. 238.



Fg. 238 Fig. 239

2.47. c) $\varepsilon=5/4$; e) $y=16/5$ e $y=-16/5$.
Resolución. Reduciendo la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$16x^2-9y^2=-144 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1,$$

obtenemos que los semiejes de la hipérbola $a=4$, $b=3$, las coordenadas de los focos $F_1(0;\ -5)$ y $F_2(0;\ 5)$, de donde la excentricidad $\varepsilon=c/a=5/4$. Entonces las ecuaciones de las directrices tendrán la forma $y=-16/5$ e $y=16/5$.

2.48. f) El conjunto buscado está representado en la fig. 239.

Indicación. Transformemos las inecuaciones del sistema dado reduciéndolas a una forma cómoda para la construcción:

$$\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2 \geqslant 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<-\dfrac{x^2}{8}, & (1) \\ y<-2-\dfrac{2x}{3}, & (2) \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16} \geqslant 1. & (3) \end{cases}$$

La inecuación (1) define el conjunto de los puntos del plano que están «más abajo» que la parábola $y=-x^2/8$. La inecuación (2) define el conjunto de los puntos que están «más abajo» que la recta $y=-2-2x/3$. Por último, la inecuación (3) define el conjunto de los puntos del plano que están «a la derecha» de la rama derecha de la hipérbola y «a la izquierda» de su rama izquierda, incluyendo los puntos que se hallan sobre la misma hipérbola.

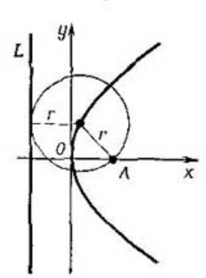


Fig. 240

2.49. Si $C<0$, es un conjunto vacío; si $C=0$, es un par de rectas dadas; si $C>0$, son dos hipérbolas conjugadas.

Resolución. Elijamos el sistema de coordenadas de un modo tal que el eje Ox sea la bisectriz de un par de ángulos verticales formados por las rectas dadas y el origen de coordenadas coincida con el punto de su intersección. Entonces las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 tienen la forma $y=kx$ e $y=-kx$, respectivamente.

Sea $M(x;\ y)$ el punto arbitrario del conjunto buscado, entonces, según F — 11, tenemos

$$d_1=\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}, \quad d_2=\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}},$$

donde d_1 y d_2 son las distancias del punto $M(x;\ y)$ a las rectas L_1 y L_2, respectivamente, y los datos del problema pueden escribirse en la forma

$$\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+2}}=C \text{ (const)}$$

o bien

$$|(kx-y)(kx+y)|=C_1, \text{ donde } C_1=(k^2+1)\cdot C.$$

Si $C_1<0$, el conjunto buscado de los puntos es vacío.

Si $C_1=0$, el conjunto de los puntos son dos rectas dadas $y=\pm kx$.

Si $C_1>0$, el conjunto de los puntos son dos hipérbolas $k^2x^2-y^2=C_1$ e $y^2-k^2x^2=C_1$.

2.50. La parábola.

Resolución. Puesto que para todo punto del conjunto buscado las distancias del punto dado al punto A y a la recta L son iguales (al radio de la circunferencia), entonces, por definición, el conjunto de todos tales puntos es parábola que tiene por foco el punto A y por directriz L (fig. 240).

3.1. $x_{90}=-1$; $x_{885}=1$.

Resolución. La sucesión dada es periódica cuyo período es igual a seis: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=-1$, $x_6=-1$, $x_7=0$, ... Por eso $x_{90}=x_{15\cdot 6}=x_6=-1$, $x_{885}=x_{147\cdot 6+3}=x_3=1$.

3.2. Resolución. La sucesión dada tiene la forma 3; $3^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{3}}$; ...; $3^{\sqrt{n}}$; .... Para la demostración utilicemos la definición de la sucesión infinitamente grande. Tomemos todo número $A > 0$. De la desigualdad $|x_n| = |3^{\sqrt{n}}| > A$ obtenemos la desigualdad $|3^{\sqrt{n}}| = 3^{\sqrt{n}} > A$. Logaritmando, encontramos $\sqrt{n}\log 3 > \log A$, $\sqrt{n} > \frac{\log A}{\log 3}$, de donde $n > \left(\frac{\log A}{\log 3}\right)^2$. Si se toma $N = \left[\left(\frac{\log A}{\log 3}\right)^2\right]$, para todos los números $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n| > A$, o sea, conforme a la definición de la sucesión infinitamente grande, la sucesión $\{3^{\sqrt{n}}\}$ es infinitamente grande.

3.3. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$-\frac{1}{3};\ \frac{2}{5\sqrt{2}+1};\ -\frac{2}{5\sqrt{3}+1};\ \frac{2}{5\sqrt{4}+1};\ \ldots;\ \frac{2}{5\sqrt{n}+1};\ \ldots.$$

Para la demostración utilicemos la definición de la sucesión infinitamente pequeña. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. De la desigualdad

$$|\alpha_n| = \left|\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right| = \frac{2}{5\sqrt{n}+1} < \frac{2}{5\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

obtenemos la desigualdad $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$, de donde $n > 1/\varepsilon^2$. Si se toma $N = [1/\varepsilon^2]$, para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$, o sea, según la definición de la sucesión infinitamente pequeña, la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ es infinitamente pequeña.

3.4. Resolución.

☐ **Demostración.** Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitamente pequeña. Tomemos todo número $A > 0$ y pongamos $\varepsilon = 1/A$. Conforme a la definición de la sucesión infinitamente pequeña, para éste número ε existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. Entonces

$$|x_n| = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A, \text{ o sea,}$$

$|x_n| > A$ para todos los números $n > N$. Pero esto, según la definición de la sucesión infinitamente grande, quiere decir que la sucesión $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinitamente grande. ■

3.5. Resolución. La sucesión dada tiene la forma 1; 2; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{1}{5}$; ... ...; $n^{(-1)^n}$; .... Tomemos un número $A > 1$. Entonces la desigualdad $|x_n| > A$ no tiene lugar para todos los elementos x_n con números de orden impares: x_1, x_3, x_5, ... Esto precisamente significa que $\{n^{(-1)^n}\}$ no es infinitamente grande.

3.6. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$1+\frac{1}{2};\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2};\ \ldots;\ 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n};\ \ldots.$$

Para la demostración utilicemos la definición del límite de la sucesión, pero previamente con ayuda de la fórmula de la progresión geométrica repre-

sentemos la expresión del elemento general de la sucesión en la forma

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n} \quad \text{o bien} \quad x_n-2=-\frac{1}{2^n}.$$

Tomemos todo número $\varepsilon>0$. Entonces de la desigualdad $|x_n-2|=\left|-\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ obtenemos la desigualdad $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$ o bien, logaritmando, $n\log_2 2>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$, de donde $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$. Si se toma $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, para todos los números $n>N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n-2|<\varepsilon$. Por lo tanto, conforme a la definición del límite de la sucesión, la sucesión $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right\}$ convergo y su límite es igual a 2, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

3.7. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2^2};\ \frac{3}{2^3};\ \ldots;\ \frac{n}{2^n};\ \ldots.$$

Para la demostración utilicemos la definición del límite de la sucesión, pero previamente con ayuda de la fórmula del binomio de Newton estimemos la expresión del elemento general de la sucesión dada. Tenemos

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

Por consiguiente,

$$|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{n^2/2}=\frac{2}{n}.$$

Tomemos todo número $\varepsilon>0$. Entonces de la desigualdad $|x_n-0|\frac{n}{|2^n|}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ obtenemos la desigualdad $n>2/\varepsilon$. Si se toma $N=[2/\varepsilon]$, para todos los números $n>N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n-0|<\varepsilon$, o sea, conforme a la definición del límite de la sucesión, la sucesión $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ converge y su límite es igual a 0, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Notemos que la sucesión dada es infinitamente pequeña.

3.8. Resolución. Mostremos que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número N tal que para $n>N$ se cumpla la desigualdad $|x_n|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}|<\varepsilon$, o sea, es válida la definición de la sucesión infinitamente pequeña. Puesto que

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}},$$

entonces

$$|x_n|=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

De aquí se deduce que para todo número $\varepsilon > 0$, si $n > N = [1 + 1/\varepsilon^2]$ se cumple la desigualdad $|x_n| < \varepsilon$. De este modo queda demostrado que $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0$. Podríamos para la demostración utilizar también la definición del límite de la sucesión. (Hágase esto por sí mismo.)

3.9. Resolución. Efectivamente, según la definición del límite de la sucesión, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. Pero, conforme a la propiedad del valor absoluto de un número (véase el ejemplo 2 del § 5, cap. 1), $||x_n| - |a|| \leqslant \leqslant |x_n - a|$ y, por consiguiente, para $n > N$ se cumple la desigualdad $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, o sea, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

3.10. La sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente grande.

Resolución. Según elteorema 3.1 la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña, según el teorema 3.6 la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ está acotada, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{a}$ (demuestre esto por sí mismo) y según el teorema 3.4 el producto $\left\{\frac{1}{x_n}\right\} \cdot \left\{\frac{1}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{x_n y_n}\right\}$ es una sucesión infinitamente pequeña; según el teorema 3.1 la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente grande. Notemos que el problema dado es la continuación del ejemplo 5, § 2.

3.11. 1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\{y_n\} = \{n^2\}$; 2) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$; 3) $\{x_n\} = \{1/n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$; 4) $\{x_n\} = \{(-1)^n/n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$. (Argumente las respuestas.)

3.12. La sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ diverge.

Resolución. Razonemos por reducción al absurdo. Designemos $z_n = x_n \cdot y_n$ y supongamos que la sucesión $\{z_n\}$ converja. Puesto que, según los datos, $\lim_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$, entonces, conforme al teorema 3.9, la sucesión $\{x_n\} = \{z_n/y_n\}$ converge. Pero esto contradice a los datos. Por consiguiente, la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ diverge.

3.13. Las sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n \cdot y_n\}$ pueden convergir ($\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ e $\{y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$) o divergir ($\{x_n\} = \{n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$).

3.14. 1) $-5/4$; 2) ∞; 3) 0; 4) $-1/2$; 5) $-5/4$.

3.15. Resolución. Se puede utilizar el hecho de que partiendo de cierto número n se cumplen las desigualdades $1/n < a < n$. Entonces $\sqrt[n]{1/n} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Pero puesto que $\sqrt[n]{n} \to 1$ y $\sqrt[n]{1/n} = 1/\sqrt[n]{n} \to 1$ para $n \to \infty$ (véase el ejemplo 3 del § 2), conforme al teorema 3.11 obtenemos que también $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3.16. 5.

Resolución. Utilicemos el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (véase el problema 3.15), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{10}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \, (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^{10} = 5 \cdot 1 \cdot 1^{10} = 5.$$

3.17. 1.

Resolución. Transformemos la expresión del elemento general de la sucesión:

$$x_n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})\,(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}=$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Efectivamente, para todos los números $n>1$ se cumplen las desigualdades

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n} \quad \text{y} \quad 1-\frac{1}{n}<\sqrt{1-\frac{1}{n}}<1.$$

Pero como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ (demuéstrese esto por sí mismo), conforme al teorema 3.11 obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

3.18. 0.

Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$\frac{2}{1!}\,;\ \frac{2^2}{2!}\,;\ \frac{2^3}{3!}\,;\ \ldots;\ \frac{2^n}{n!}\,;\ \ldots.$$

Decrece monótonamente, ya que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!\,(n+1)\,2^n}=\frac{2}{n+1}<1$$

para $n>1$, o sea, $x_{n+1}<x_n$ y está acotada superiormente, verbigracia, por el elemento x_1. Además, puesto que $x_n>0$, la sucesión está acotada inferiormente. Por consiguiente, la sucesión dada es monótona y está acotada. Conforme al teorema 3.12 ella converge. Designemos su límite con a y determinémoslo. Para esto utilicemos el hecho de que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1} \quad \text{o bien} \quad x_{n+1}=\frac{2}{n+1}\,x_n.$$

En la última igualdad pasando al límite para $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$$

obtenemos $a=0\cdot a$, de donde $a=0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

3.19. 2.

Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$x_1=\sqrt{2};\ x_2=\sqrt{2\sqrt{2}};\ x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ \ldots;$$
$$x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n\ \text{raíces}};\ \ldots .$$

Comprobemos primero el hecho de que el límite exista. Es evidente que $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$, o sea, la sucesión dada es monótona creciente y está acotada inferiormente por el elemento x_1. Por el método de inducción demostremos que $x_n < 2$ para todo número n, o sea, la sucesión está acotada superiormente. En efecto como $x_1=\sqrt{2}<2$, entonces $x_2=\sqrt{2x_1}< \sqrt{2\cdot 2}=2$; $x_3=\sqrt{2\cdot x_2}<\sqrt{2\cdot 2}=2$; $\ldots$. Supongamos que $x_n<2$. Entonces $x_{n+1}=\sqrt{2\cdot x_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2$. Y puesto que $x_1<2$, para todos los números n $x_n<2$, lo que se quería demostrar. Por lo tanto, queda determinado que la sucesión dada es monótona y está acotada. Según el teorema 3.12 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe.

Partiendo del hecho de que el límite existe, determinemos ahora su valor. Para esto elevemos al cuadrado la igualdad $x_{n+1}=\sqrt{2\cdot x_n}$: $x_{n+1}^2=2x_n$. En este caso, si la sucesión $\{x_n\}$ tiene el límite a, pasando al límite para $n\to\infty$ en la última igualdad

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty} 2x_n=\lim_{n\to\infty} 2\lim_{n\to\infty} x_n,$$

obtenemos la desigualdad $a^2=2a$, de donde $a=0$ o bien $a=2$. Pero puesto que según lo demostrado la sucesión $\{x_n\}$ crece y al mismo tiempo para todo número n $x_n<2$, entonces $a=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

5.1. $x=\pm\sqrt{2/3}$.

Resolución. Puesto que la tangente es paralela a la recta $y=x$, su coeficiente angular (pendiente) es igual a 1, o sea, al coeficiente angular de esta recta. Por otro lado, el coeficiente angular de la tangente en el punto x_0 es igual a $f'(x_0)$.

Así pues, es necesario hallar a qué valores de x es justa la igualdad $f'(x)=1$. Como $f(x)=x^3-x$, $f'(x)=3x^2-1$, obtenemos la ecuación $3x^2-1=1$. De aquí $x=\pm\sqrt{2/3}$.

5.2. $-45°$.

Resolución. El coeficiente angular buscado es igual al valor de la derivada de la función en el punto $x=0$ (en el punto de intersección de la gráfica con el eje Oy). Puesto que $f(x)=2x^3-x$, entonces $f'(x)=6x^2-1$ y $f'(0)=-1$.

5.3. 45°; 0°; $-45°$.

Resolución. Los coeficientes angulares buscados son iguales a los valores de la derivada en los puntos 0; 2; 4. Como $f(x)=\dfrac{4x-x^2}{4}$, entonces $f'(x)=\dfrac{4-2x}{4}$. Respectivamente, tenemos: $f'(0)=1$; $f'(2)=0$; $f'(4)=-1$.

5.4. $y=x+1$.

Resolución. Los puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen de la condición de que $y_0=0$, o sea, $(x_0^3+1)/3=0$. De aquí $x_0=-1$. La ecuación de la tangente que pasa por el punto de la gráfica $(x_0;\ y_0)$ tiene la forma $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Puesto que $f(x)=\dfrac{x^3+1}{3}$, entonces $f'(x)=x^2$ y $f'(x_0)=1$. Obtenemos la ecuación de la tangente $y=x+1$.

5.5. $-45°$.

Resolución. El coeficiente angular buscado es igual al valor de la derivada para $x = 1$. Como $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f'(1) = -1$.

5.6. $a = 4$.

Resolución. Obtenemos los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas de la ecuación $\frac{ax_0 - x_0^3}{4} = 0$; de aquí $x_0 = 0$ o bien (para $a \geqslant 0$) $x_0 = \pm\sqrt{a}$. En estos puntos los coeficientes angulares son iguales a $f'(x_0)$. Puesto que $f(x) = (ax - x^3)/4$, entonces $f'(x) = (a - 3x^2)/4$. De aquí $f'(0) = a/4$ o bien (para $a \geqslant 0$) $f'(\pm\sqrt{a}) = -a/2$.

Según los datos, $f'(x_0) = 1$. Por lo tanto, $a = 4$ o bien (para $a \geqslant 0$) $a = -2$. El valor de $a = -2$ no corresponde.

5.7. La recta $y = 3x - 4$ es tangente a la curva $y = x^3 - 2$.

Resolución. Si la recta $y = 3x - 4$ es tangente a la curva $y = x^3 - 2$ en el punto $(a; a^3 - 2)$, entonces $f'(a) = 3$. De aquí $3a^2 = 3$, por consiguiente, $a = \pm 1$. La tangente que pasa por el punto de la curva con la abscisa a tiene la ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Para $a = 1$ resulta $y + 1 = 3(x - 1)$, de donde $y = 3x - 4$.

5.8. $y = -x + 2$; $y = -9x - 6$.

Resolución. La ecuación de la tangente que pasa por el punto de la hipérbola $(a; 1/a)$, $y - 1/a = f'(a)(x - a)$. Puesto que $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f'(a) = -1/a^2$. Así pues, la ecuación de la tangente tiene la forma $y - 1/a = -(1/a^2)(x - a)$, de donde

$$y = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}. \qquad (*)$$

Según los datos, esta recta pasa por el punto $(-1; 3)$, o sea, $3 = 1/a^2 + 2/a$. De aquí $3a^2 - 2a - 1 = 0$; por lo tanto, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$. Sustituyendo estos valores en (*), obtenemos la respuesta.

5.9. $y = x + 10$.

Resolución. Supongamos que la recta buscada pasa por el punto $(a; 8 - 3a - 2a^2)$ en la primera parábola. La ecuación general de la tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Puesto que $f(x) = 8 - 3x - 2x^2$, entonces $f'(x) = -3 - 4x$ y $f'(a) = -3 - 4a$. Así pues, la recta dada tiene la ecuación $y = 8 - 3a - 2a^2 - (3 + 4a)(x - a)$, o sea, $y = -(4a + 3)x + 2a^2 + 8$. Supongamos ahora que la recta pasa por el punto $(b; 2 + 9b - 2b^2)$ en la segunda parábola. Razonando análogamente, obtenemos que la ecuación de la recta es $y = -(4b - 9)\cdot x + 2b^2 + 2$. Las dos ecuaciones obtenidas deben definir la misma recta. Por lo tanto,

$$\begin{cases} 4a + 3 = 4b - 9, \\ 2a^2 + 8 = 2b^2 + 2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos $a = -1$. De esta manera, la ecuación de la recta buscada es $y = x + 10$.

5.10. $a = 0$; $b = 1/4$.

Resolución. La ecuación de la tangente a la parábola en el punto $(c; c^2 + ac + b)$ es la siguiente: $y = c^2 + ac + b + f'(c)(x - c)$, con la particularidad de que $f'(x) = 2x + a$, o sea, $f'(c) = 2c + a$. Por esta razón la ecuación de la tangente es $y = (a + 2c)x + b - c^2$.

Si de tangente sirve la recta $y = -x$, obtenemos

$$\begin{cases} a + 2c = -1, \\ b - c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-(a+1)}{2}, \\ c^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = b \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 4b. \qquad (*)$$

En el segundo caso la tangente es la recta $y = 5x - 6$. Entonces

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ b-c^2=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} c=\dfrac{5-a}{2}, \\ c^2=b+6 \end{cases} \iff a^2-10a+1=4b. \qquad (**)$$

De (*) y (**) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a^2+2a+1=4b, \\ a^2-10a+1=4b. \end{cases}$$

Sustrayendo de la primera ecuación la segunda, tenemos $a = 0$ y $b = 1/4$.

5.11. $x = 0$ y $x = 4$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la circunferencia a la forma canónica: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$, de donde $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Así pues, el centro de la circunferencia —el punto (2; 0)— está en el eje de abscisas. Por eso las tangentes a la circunferencia en los puntos de intersección con el eje de abscisas son verticales. Como el radio vale 2, estas tangentes pasan por los puntos (0; 0) y (4; 0).

5.12. Resolución. La función $y = |x|$ no tiene la derivada sólo en el punto $x = 0$ y las funciones $y = |x - 1|$, $y = |x - 2|$ no las tienen en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, respectivamente. Por eso a los datos del problema les satisface, por ejemplo, la función $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$.

5.13. Resolución. Puesto que la función $f(x)$ se define por diferentes fórmulas en los intervalos $(-\infty; 0)$ y $[0, +\infty)$ que tienen un extremo común $x = 0$, es necesario calcular las derivadas derecha e izquierda en el punto $x = 0$. Tenemos

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^-}\Delta x=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(0+\Delta x)-\operatorname{sen}0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Puesto que las derivadas derecha e izquierda son diferentes, la función dada no tiene una derivada en el punto $x = 0$, lo que se quería demostrar.

5.14. Resolución. Supongamos que Δx tiende a cero, tomando los valores racionales. Entonces $\Delta y = \operatorname{sen}(0 + \Delta x) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \Delta x$ y, por consiguiente,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1.$$

En cambio, si $\Delta x \to 0$ tomando los valores irracionales, $\Delta y = (0 + \Delta x) - 0 = \Delta x$ y, por lo tanto,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Ambos límites coinciden, por esta razón la función dada tiene una derivada en el punto $x = 0$, lo que se quería demostrar.

5.15. Resolución. En el caso en que la función $f(x)$ no se define por una sola sino por varias funciones la derivada ha de calcularse, a veces, inmediatamente partiendo de la definición de la misma.

En el caso dado para $x \neq 0$ la derivada de la función $f(x)$ existe y se calcula por las fórmulas y las reglas de derivación:

$$f'(x) = \left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)' \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

En cambio, en el punto $x = 0$ la derivada se encuentra inmediatamente según la definición:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \operatorname{sen} (1/\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \operatorname{sen} (1/\Delta x) = 0$$

(el producto de una función infinitamente pequeña por otra acotada es un infinitesimal). De esta manera,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} (1/x) - \cos (1/x) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

De aquí se desprende, en particular, que la función $f(x)$ es derivable en toda la recta numérica.

Mostremos ahora que la derivada $f'(x)$ es discontinua en el punto $x = 0$. En efecto, como $\lim\limits_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} (1/x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \cos (1/x)$ no existe, tampoco $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ existe. De aquí se deduce que la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ es discontinua.

5.16. Resolución. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad f(0) = \ln 1 = 0,$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5.17. Resolución. Puesto que

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x; \qquad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \operatorname{sen} x; \qquad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^{-2} x; \quad f'''(0) = 2,$$

por la fórmula de Maclaurin tenemos

$$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^3).$$

Note que en realidad el término residual tiene la forma $o(x^4)$, ya que $f^{(4)}(0) = 0$ (compruebe esto por sí mismo).

5.18. a) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$; b) $e^{2x - x^2} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{6} x^4 - \frac{1}{15} x^5 + o(x^5)$; c) $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$; d) $\operatorname{sen} \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

5.19. a) 0; b) 1; c) 0; d) $-1/12$; e) $1/3$; f) $-1/4$.

Indicación. Al calcular los límites semejantes es necesario desarrollar las funciones según la fórmula de Maclaurin en el numerador y el denominador hasta un término del mismo orden. Así, por ejemplo, en los ejemplos a), d) y e) hasta el término con x^4.

6.1. $4\pi/3+\sqrt{3}$.

Resolución. Apliquemos la sustitución $x=\varphi(t)=2\operatorname{sen} t$, considerando que $-\pi/3\leqslant t\leqslant \pi/3$. Sobre el segmento $[-\pi/3, \pi/3]$ la función $\varphi(t)=2\operatorname{sen} t$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable, ya que es continuamente derivable, monótona y $\varphi(-\pi/3)=-\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3)=\sqrt{3}$. Notemos que $\sqrt{4-x^2}=2|\cos t|=2\cos t$ ($|\cos t|=\cos t$, ya que para $-\pi/3\leqslant t\leqslant \pi/3$ en los cuadrantes I y IV, $\cos t>0$), $\varphi'(t)=2\cos t$. Por esta razón

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

6.2. $32/3$.

Resolución. Hagamos la sustitución $t=\sqrt{1+x}$. Expresando de aquí x, obtenemos que $x=\varphi(t)=t^2-1$; como $t=2$ para $x=3$ y para $x=8$ tenemos $t=3$, consideraremos que la función $x=\varphi(t)$ está definida en el segmento $[2, 3]$. Puesto que la función $\varphi(t)$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable, resulta

$$\int_3^8\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}=2\int_2^3(t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3=\frac{32}{3}.$$

6.3. $\sqrt{3}/32$

Resolución. Hagamos uso de la sustitución $x=g(t)=\dfrac{2}{\cos t}=2\sec t$, donde $0\leqslant t\leqslant \pi/3$. Entonces $g'(t)=2\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$. Puesto que en el segmento $[0, \pi/3]$ la función $x=g(t)$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable,

$$\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt. \qquad (*)$$

Para calcular la última integral notemos que si en la fórmula de cambio de la variable $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ en la integral a la izquierda se pone $f(x)=x^2$ y $x=\varphi(t)=\operatorname{sen} t$, entonces

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)=\operatorname{sen}^2 t\cos t,$$

o sea, en la integral del segundo miembro de la igualdad (*) la función subintegral es igual a $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Por esta razón, utilizando la fórmula de cambio de

la derivable de derecha a izquierda, obtenemos

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} u^2\, du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

6.4. 0.

Resolución. En virtud de las fórmulas de reducción, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Por eso $\sqrt[3]{\cos(\pi - x)} = -\sqrt[3]{\cos x}$ y las figuras que tienen las áreas S_1 y S_2 (fig. 241) son simétricas respecto al punto $\pi/2$ en el eje de abscisas, quiere decir $S_1 = S_2$. Por otro lado, utilizando la fórmula (5) del § 6, tenemos

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx.$$

Puesto que $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = S_1$ y $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = -S_2$, resulta

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx = S_1 - S_2 = 0.$$

6.5. $S = 9/4$.

Resolución. Cerciorémonos de que los puntos dados están en la parábola: $-3 = -0^2 + 4\cdot 0 - 3$; $0 = -3^2 + 4\cdot 3 - 3$. Determinemos las ecuaciones de las tangentes. Sustituyendo en la ecuación de la tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

primero $x_0 = 0$, $f(x_0) = -3$ y $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = 4$ y luego $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0$ y $f'(x_0) = -2$, obtenemos $y = 4x - 3$ o $y = -2x + 6$. Encontramos el punto de intersección de las tangentes:

$$\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -2x + 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3. \end{cases}$$

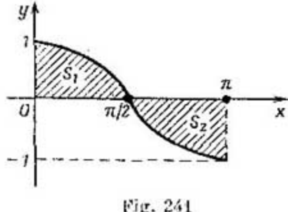


Fig. 241

Determinemos el área de la figura obtenida (fig. 242):

$$S = \int_0^{3/2} [(4x-3) - (x^2 + 4x - 3)]\, dx + \int_{3/2}^{3} [(-2x+6) - (-x^2 + 4x - 3)]\, dx =$$

$$= \int_0^{3/2} x^2\, dx + \int_{3/2}^{3} (x-3)^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2} + \frac{(x-3)^3}{3}\Big|_{3/2}^{3} = \frac{9}{4}.$$

6.6. $S = 2 + \pi^3/6$.

Resolución. Notando que $x = 0$ y $x = \pi$ son las raíces de la función $y = x^2 - \pi x$ y construyendo las gráficas de las líneas dadas, o sea, la sinusoide

y la parábola (fig. 243), encontramos el área S de la figura prefijada:

$$S=\int_0^{\pi}[\operatorname{sen} x-(x^2-\pi x)]\,dx=\int_0^{\pi}(\operatorname{sen} x-x^2+\pi x)\,dx=$$

$$=[-\cos x-x^3/3+\pi x^2/2]_0^{\pi}=[(1-\pi^3/3+\pi^3/2)-(-1)]=2+\pi^3/6.$$

6.7. $S=11/2$.

Resolución. Como $y=|x|+1=\begin{cases} x+1 & \text{para } x\in[0,+\infty), \\ -x+1 & \text{para } x\in(-\infty,0), \end{cases}$ entonces,

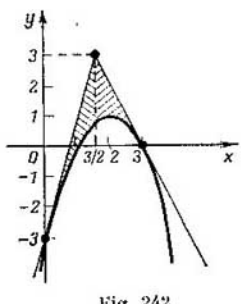


Fig. 242

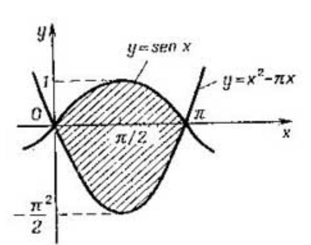


Fig. 243

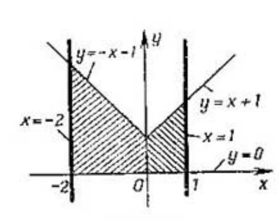


Fig. 244

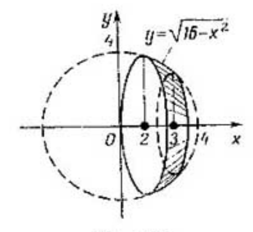


Fig. 245

dividiendo la figura dada en dos partes (fig. 244), encontramos el área:

$$S=\int_{-2}^{0}(-x+1)\,dx+\int_0^1(x+1)\,dx=(-x^2/2+x)\Big|_{-2}^{0}+(x^2/2+x)\Big|_0^1=$$

$$=[0-(-(-2)^2/2+(-2)]+[(1/2+1)-0]=11/2.$$

6.8. $V=\dfrac{29}{3}\pi$.

Resolución. La capa esférica dada puede ser representada como cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo alrededor del eje Ox (fig. 245) y limitado por las líneas $y=\sqrt{16-x^2}$, $x=2$, $x=3$ y por el eje Ox. Por eso,

según la fórmula $V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$, para el volumen V de esta capa esférica tenemos

$$V = \pi \int_2^3 (16 - x^2)\,dx = \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{29}{3}\pi.$$

6.9. $V = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$.

Resolución. El segmento esférico (véase la fig. 213) puede considerarse como cuerpo que se engendra por la revolución en torno al eje Ox de un trapecio curvilíneo formado por el arco de la circunferencia $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, las rectas $x = -R$ y $x = -R + H$ y el eje Ox (fig. 246). Por eso según la fórmula $V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje Ox, el volu-

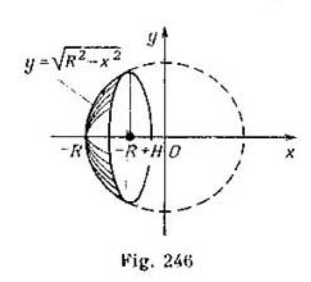


Fig. 246

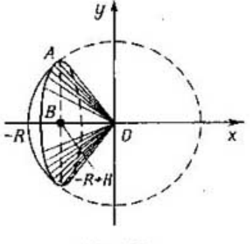


Fig. 247

men del segmento esférico se puede hallar así:

$$V = \pi \int_{-R}^{-R+H} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{-R+H} = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H).$$

Observación. La fórmula del volumen del segmento esférico se puede obtener de la fórmula del volumen de la capa esférica:

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\,dx$$

si se hace que a tienda hacia $-R$.

6.10. $V = 2\pi R^2 H/3$.

Resolución. El volumen del sector esférico puede obtenerse sumando el volumen del segmento esférico (véase el problema 6.9) y el del cono $(1/3)\pi\,|AB|^2\,|OB|$ (fig. 247); obtenemos que $|AB| = \sqrt{R^2 - (-R + H)^2} = \sqrt{2RH - H^2}$; $|OB| = R - H$. Por lo tanto, para el volumen del sector

esférico

$$V=\frac{\pi H^2(3R-H)}{3}+\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)=\frac{2\pi R^2H}{3}.$$

6.11. **Resolución**. Supondremos que el mijo limpio llene una parte cual quiera de la cacerola sin lugares vacíos, al igual que un líquido. Admitamos que el radio de la base (del fondo) de la cacerola cilíndrica es igual a R y el mijo cargado ha subido hasta la altura H (fig. 248). Determinemos el volumen del espacio ocupado por el mijo. Para esto hagamos uso de la fórmula $V=\int_a^b S(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo cuyas secciones transversales tienen el área $S(x)$. Sea O el centro de la base del cilindro; orientemos el eje Ox a lo largo del

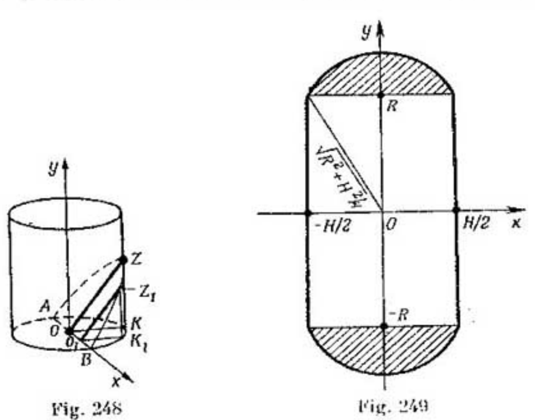


Fig. 248 Fig. 249

diámetro de la base AB. Determinemos el área $S(x)$ de sección del cuerpo buscado por el plano que es perpendicular al eje Ox y pasa por el punto de este eje con coordenada x. Si el plano corta el cuerpo por el triángulo $O_1Z_1K_1$, entonces $\Delta O_1Z_1K_1\sim\Delta OZK$ (fig. 248), de donde $l:R=h:H$ (aquí $|OK|=R$, $|ZK|=H$, $|O_1K_1|=l$, $|K_1Z_1|=h$). Puesto que $l^2=R^2-x^2$, entonces $S(x)=\frac{1}{2}lh=\frac{1}{2}\frac{H}{R}l^2=\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)$. De esta manera, el volumen V_1 del mijo es igual a

$$V_1=2\int_0^R\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{R}\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}HR^2.$$

El volumen total V de agua y de mijo es igual al volumen del cilindro cuyo radio es R y altura H; por esta razón $V=\pi R^2H$; la razón entre el volumen V_2 de agua y el volumen V_1 de mijo es igual a

$$V_2:V_1=(V-V_1):V_1=\left(\pi-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}-1\approx3{,}7$$

y no depende de la cantidad de mijo ni del tamaño de la cacerola. Así pues, suponiendo que el mijo llena por completo, sin claros, el volumen, hemos resuelto ambas partes del problema.

6.12. No se necesitará añadir alguna cantidad de oro.

Resolución. Determinemos el volumen del anillo. Mediante la fórmula $V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de un trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, en torno al eje Ox, determinemos el volumen buscado V como diferencia entre el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant\sqrt{(R^2+H^2/4)-x^2}$,

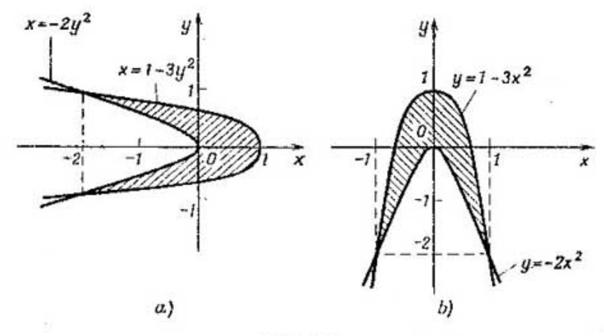


Fig. 250

$-H/2\leqslant x\leqslant H/2$, y el volumen del cilindro engendrado por la revolución de la recta $y=R$ en torno al eje Ox (fig. 249). Por lo tanto,

$$V=\pi\int_{-H/2}^{H/2}\left[\left(R^2+\frac{H^2}{4}\right)-x^2\right]dx-\pi\int_{-H/2}^{H/2}R^2\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^{H/2}\left(\frac{H^2}{4}-x^2\right)dx=2\pi\left(\frac{H^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{H/2}=\frac{\pi H^3}{6}.$$

Ahora bien, el volumen del anillo no depende del radio R y depende sólo de la altura H, por eso el orfebre no tiene que agregar oro.

6.13. a) $S=4/3$; b) $V=\pi/2$.

Resolución. a) El eje de abscisas es eje de las parábolas dadas. Evidentemente, de las ecuaciones de las parábolas obtenemos que para la primera de ellas $3y^2=1-x\geqslant 0$, por esta razón $x\leqslant 1$; de manera análoga, para la segunda parábola tenemos $x\leqslant 0$. Determinemos adicionalmente algunos puntos de las gráficas y construyámoslos (fig. 250, *a*). Reflejemos simétricamente las gráficas obtenidas respecto a la recta $y=x$. Hemos obtenido las gráficas de las funciones $y=1-3x^2$ e $y=-2x^2$ (fig. 250, *b*). De la ecuación

$$1-3x^2=-2x^2$$

determinemos las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas obtenidas: $x = \pm 1$. Utilizando la simetría de las parábolas respecto al eje Oy, determinemos el área S de la figura buscada (es igual al área de la figura representada en la fig. 250, b que es simétrica a ella respecto a la recta $y = x$):

$$S = \int_{-1}^{1} [(1-3x^2)-(-2x^2)]\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b) Determinemos la abscisa de los puntos de intersección de las gráficas dadas (véase la fig. 250, a) del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x=1-3y^2 \\ x=-2y^2 \end{cases}$, tenemos $x = -2$. El volumen del cuerpo buscado puede ser hallado como diferencia de los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de dos trapecios curvilíneos en torno al eje Ox. El primero de los trapecios está engendrado por la parte de la parábola $x = 1 - 3y^2$ situada por encima del eje Ox, la ecuación de este trozo es $y = \sqrt{\frac{1-x}{3}}$, así como por las rectas $x = -2$, $x = 1$ y el eje Ox. El segundo trapecio está engendrado por la parábola $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$, las rectas $x = -2$, $x = 0$ y el eje Ox. Hallamos el volumen:

$$V = \pi\left[\int_{-2}^{1}\left(\frac{1-x}{3}\right)dx - \int_{-2}^{0}\left(-\frac{x}{2}\right)dx\right] =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}\right)\Big]_{-2}^{1} + \frac{x^2}{4}\Big|_{-2}^{0}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

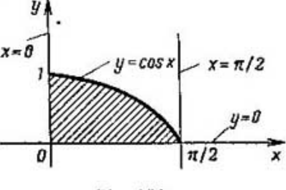


Fig. 251

6.14. a) $S = 1$; b) $V = \pi^2/4$.

Resolución. a) Puesto que $\cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = \cos x$, la figura dada es un trapecio curvilíneo limitado por las líneas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$ (fig. 251). Determinemos su área:

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

b) Calculemos el volumen del cuerpo de revolución

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx\right].$$

Para encontrar la última integral se puede hacer la sustitución de la variable según la fórmula $x = t/2$. Entonces

$$\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\Big|_0^{\pi} = 0.$$

6.15. $L = 8/27\,(10\sqrt{10}-1)$.

Resolución. Hagamos uso de la fórmula $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, donde L es la longitud del arco de la curva $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Puesto que $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, entonces $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$. La longitud del arco

$$L=\int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx.$$

Después de la sustitución $1+\frac{9x}{4}=t$, o sea, $x=\frac{4t-1}{9}$ obtenemos

$$L=\int\limits_1^{10} \sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt=\frac{4}{9}\int\limits_1^{10} t^{1/2}\,dt=\frac{4}{9}\,\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^{10}=\frac{8}{27}\,(10\sqrt{10}-1).$$

6.16. a) $S=2a\sqrt{a}/3$; b) $V=\pi a^2/2$; c) $S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right]$.

Resolución. a) La figura dada está rayada en la fig. 252, *a*. Está limitada

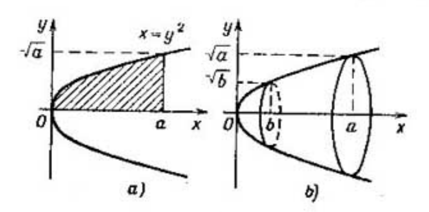


Fig. 252

superiormente por la parábola $y=\sqrt{x}$. Determinemos el área de la figura:

$$S=\int\limits_0^a \sqrt{x}\,dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a=\frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

b) Determinemos el volumen V del cuerpo de revolución:

$$V=\pi\int\limits_0^a (\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int\limits_0^a x\,dx=\pi\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{\pi a^2}{2}.$$

c) Sea $b>0$. Determinemos primero el área S_b de la superficie engendrada por la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y=\sqrt{x}$ y por las rectas $x=b$, $x=a$, $y=0$ (fig. 252, *b*). Como $y'=1/(2\sqrt{x})$, entonces

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+1/(4x)}$. Según la fórmula $S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, donde S es el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, en torno al eje Ox, el área de la superficie en cuestión S_b se puede hallar así:

$$S_b=2\pi\int\limits_b^a\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=2\pi\int\limits_b^a\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx=2\pi\left.\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\right|_b^a=$$
$$=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\left(b+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right].$$

Ahora, haciendo tender b hacia 0, obtenemos

$$S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right].$$

6.17. $y_C=\dfrac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

Resolución. El arco es simétrico respecto al radio que pasa por su punto medio, por eso el centro de gravedad está en este radio. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 253; supongamos que el arco gira

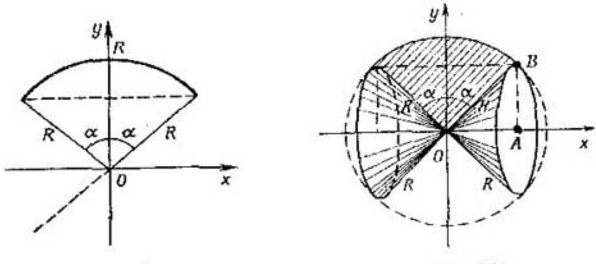


Fig. 253 Fig. 254

alrededor del eje Ox. En este caso el arco describirá la superficie de la zona esférica (véase el ejemplo 13, § 11). La superficie del arco es igual a $2\pi RH$, donde H es la altura de la zona que en el caso dado es igual a la longitud de la cuerda que subtiende el arco dado; es evidente que $H=2R\operatorname{sen}\alpha$. Puesto que la longitud del arco dado es igual a $2R\alpha$, entonces, designando la ordenada del centro de gravedad por y_C, en virtud del primer teorema de Guldin, obtenemos

$$4\pi R^2\operatorname{sen}\alpha=2\pi y_C\cdot 2R\alpha,\text{ de donde } y_C=\frac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}.$$

Observación. De la respuesta obtenida se deduce que el centro de gravedad de la semicircunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$ está en el punto $(0;\ 2R/\pi)$.

6.18. $y_C=\dfrac{2R\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 254.

En virtud de la simetría del sector respecto al eje Oy el centro de gravedad está sobre este eje. Para resolver el problema hagamos uso del segundo teorema de Guldin. Determinemos primero el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del sector dado en torno al eje Ox. La ecuación del arco del sector $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; las abscisas de los extremos del arco son, evidentemente, iguales a $\pm R$ sen α y las ordenadas de estos extremos valen R cos α. Determinemos

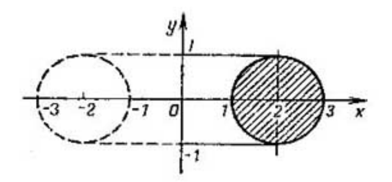


Fig. 255

el volumen del cuerpo buscado como diferencia entre el volumen de la capa esférica engendrada al girar el trapecio curvilíneo, limitado por el arco $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, las rectas $x = \pm R$ sen α y el eje Ox, y los volúmenes de dos conos iguales engendrados por la revolución de los radios extremos del sector (fig. 254):

$$V = \pi \int\limits_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{R \operatorname{sen} \alpha} (R^2 - x^2)\, dx - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \mid AB \mid^2 \mid OA \mid =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{R \operatorname{sen} \alpha} (R^2 - x^2)\, dx - \frac{2}{3} \pi R^2 \cos^2 \alpha R \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{R \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2\pi R^3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{sen} \alpha.$$

Puesto que el área del sector dado es igual a $R^2\alpha$, entonces, designando con y_C la ordenada del centro de gravedad, en virtud del segundo teorema de Guldin obtenemos

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{sen} \alpha = R^2 \alpha \cdot 2\pi y_C, \text{ de donde } \quad y_C = \frac{2R \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}.$$

Observación. De la respuesta obtenida se deduce que el centro de gravedad del semicírculo $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$ está en el punto $(0;\ 4R/(3\pi))$.

6.19. a) $V = 4\pi^2$; b) $S = 8\pi^2$.

Resolución. a) Hagamos uso del segundo teorema de Guldin. El área del círculo dado es igual a π, su centro de gravedad —el punto $(2;\ 0)$— al girar describe la circunferencia de 4π de largo, por eso el volumen del toro $V = \pi \cdot 4\pi = 4\pi^2$.

b) Hagamos uso del primer teorema de Guldin. Determinemos primero el área S_1 de la superficie engendrada por la revolución de la semicircunferencia «derecha» $x = 2 + \sqrt{1 - y^2}$ en torno al eje Oy (fig. 255). Puesto que la longitud de esta semicircunferencia vale π y su centro de gravedad, o sea, el punto

$(2+2/\pi;\ 0)$[1]) describe la circunferencia de $2\pi\,(2+2/\pi)$ de largo (fig. 255), entonces el área

$$S_1=\pi\cdot 2\pi\left(2+\frac{2}{\pi}\right)=4\pi\,(\pi+1).$$

Análogamente encontramos el área S_2 de la superficie engendrada por la revolución de la semicircunferencia «izquierda» (su centro de gravedad es el punto $(2-2/\pi;\ 0)$): $S_2=4\pi\,(\pi-1)$. Ahora bien, el área de la superficie del toro dado

$$S=S_1+S_2=8\pi^2.$$

6.20. $A=0{,}125$ kgfm.

Resolución. Determinemos primero el valor del coeficiente de proporcionalidad k. Puesto que, en virtud de los datos del problema, para $x=0{,}01$ m $F\,(0;\ 01)=1$ kgfm, o sea, $1=k\cdot 0{,}01$, el coeficiente de proporcionalidad $k=\frac{1}{0{,}01}=100$. Por consiguiente, la fuerza que estira el muelle de $x=0$ a $x=0{,}05$ m se expresa por la fórmula $F\,(x)=100\cdot x$. Según la fórmula $A=\int\limits_a^b F\,(x)\,\mathrm{d}x$, donde A es el trabajo realizado por la fuerza $F\,(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, el trabajo buscado se puede hallar así:

$$A=\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{0,05}100x\,\mathrm{d}x=100\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05}=100\,\frac{(0{,}05)^2}{2}=0{,}125\ \text{kgfm}.$$

---

[1]) Véase la observación para el problema 6.17.

Indice alfabético de materias